

БИБЛИОТЕЧКА •КВАНТ•

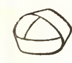
ВЫПУСК 14

С. Г. ГИНДИКИН

РАССКАЗЫ О ФИЗИКАХ И МАТЕМАТИКАХ







БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»
ВЫПУСК 14

С. Г. ГИНДИКИН

РАССКАЗЫ О ФИЗИКАХ И МАТЕМАТИКАХ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

20Г
Г49
УДК 501 (09)

Гиндикин С. Г.
Г49 Рассказы о физиках и математиках.— 2-е изд.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985, 192 с.— (Библиотечка «Квант». Вып. 14.) — 30 к.

В книге рассказывается о жизни и открытиях таких выдающихся ученых как Кардано, Тарталья, Галилей, Гюйгенс, Паскаль, Гаусс. Подробно и доступно школьнику рассказывается о результатах, полученных учеными, о состоянии математики и физики в соответствующее время. Из книги читатель узнает о том, как появились первые работы по алгебре, об истории открытия Галилеем спутников Юпитера и роли, которую это открытие сыграло в науке, об изобретении маятниковых часов и математических работах Гюйгенса, связанных с этим изобретением, о работах Гаусса и т. д.

Для школьников, преподавателей, студентов, лекторов

Г $\frac{1700000000-001}{053(02)-85}$ 185 – 85

ББК 20Г
51 (09)

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга написана на основе статей, публиковавшихся в журнале «Квант» в течение ряда лет. Этим объясняется некоторый элемент случайности в выборе людей и событий, которым посвящены рассказы, собранные в книге. Однако нам кажется, что в книге идет речь о принципиальных явлениях в истории науки, достойных внимания любителей математики и физики.

Мы захватываем промежуток в четыре века и начинаем в очень важный для европейской математики XVI век, когда ей собственно предстояло заново родиться, через тысячу лет после заката античной математики. Наш рассказ начинается в тот момент, когда европейские математики после трех веков ученичества смогли получить результаты, которых не знали ни математики Древней Греции, ни математики Востока: была найдена формула для решения уравнений 3-й степени. События следующей серии рассказов начинаются на рубеже XVI и XVII веков, когда Галилей, исследуя свободное падение, заложил фундамент и для развития новой механики, и для развития анализа бесконечно малых. Параллельное формирование этих двух теорий — одно из самых знаменательных научных явлений XVII века (от Галилея до Ньютона и Лейбница). Мы рассказываем также о замечательных астрономических открытиях Галилея, прервавших его занятия механикой, о его драматической борьбе за утверждение учения Коперника. Наш следующий герой — Гюйгенс — непосредственный продолжатель Галилея в науке. Избранный нами сюжет — это продолжавшаяся сорок лет работа Гюйгенса над созданием и совершенствованием маятниковых часов. Значительная часть достижений Гюйгенса и в области физики, и в области математики непосредственно стимулировалась этой деятельностью. XVII век представлен у нас также Паскалем — одним из самых удивительных людей в истории человечества. Паскаль начинал как геометр, и его юно-

шеская работа знаменовала, что европейская математика уже способна состязаться с великими греческими математиками на их собственной территории — в геометрии. Со времени первых успехов европейской математики в алгебре прошло сто лет.

К концу XVIII века математика неожиданно оказалась без опорных задач, вокруг которых концентрировались бы усилия ведущих ученых. Математический анализ в некотором приближении был построен; ни алгебра, ни геометрия не выдвинули к тому времени подходящих проблем. Положение «спасла» небесная механика. Построение теории движения небесных тел на основе закона всемирного тяготения потребовало величайших усилий крупнейших математиков, начиная с Ньютона. Долгое время почти все крупные математики считали делом чести продемонстрировать свои возможности на какой-нибудь задаче небесной механики. Не был исключением и Гаусс, которому посвящена последняя часть книги. Но к этим задачам Гаусс пришел уже будучи зрелым ученым, а дебютировал он беспрецедентным образом. Он решил задачу, стоявшую 2000 лет: доказал возможность построения циркулем и линейкой правильного 17-угольника (древние умели строить правильные n-угольники при $n=2^k$, $3\cdot2^k$, $5\cdot2^k$, $15\cdot2^k$ и много сил потратили на безуспешные попытки придумать построение для других n). Технически это открытие Гаусса основывалось на арифметических рассмотрениях. Работы Гаусса подводили итог полуторавековой деятельности по превращению арифметики из набора удивительных фактов о конкретных числах, накапливавшихся с глубокой древности, в науку. Этот процесс начался с работ Ферма и был продолжен Эйлером, Лагранжем, Лежандром. Поразительно, что Гаусс в юности, не имея доступа к математической литературе, самостоятельно воспроизвел большинство результатов своих великих предшественников.

Наблюдение над историей науки из сравнительно случайно выбранных точек оказывается во многом поучительным: например, бросаются в глаза многочисленные связи, выявляющие единство науки в пространстве и времени. Связи разного характера иллюстрируются рассматриваемым в книге материалом: непосредственная преемственность у Галилея и Гюйгенса; идеи Тартальи о траектории брошенного тела, доведенные Галилеем до точного ре-

зультата; сослужившее пользу тому же Галилею предложение Кардано пользоваться пульсом для измерения времени; задачи Паскаля о циклоиде, оказавшиеся кстати Гюйгенсу, работавшему над изохронным маятником; теория движения спутников Юпитера, открытых Галилеем, в которую ученые нескольких поколений старались внести хоть небольшой вклад, и т. д.

Можно подметить много ситуаций в истории науки, которые часто повторяются с небольшими вариациями (по словам французского историка Токвиля «история — это картинная галерея, в которой мало оригиналов и много копий»). Обратим внимание, например, как трансформируется оценка ученого с течением веков. Кардано не сомневался, что его главные заслуги относятся к медицине, а не к математике; похоже, что Кеплер считал своим главным достижением «открытие» мифической связи между орбитами планет и правильными многогранниками; ни одно свое открытие Галилей не ценил так, как ошибочное утверждение, что приливы и отливы доказывают истинное движение Земли (в значительной степени ради его публикации он пожертвовал своим благополучием); Гюйгенс считал своим важнейшим результатом применение циклоидального маятника в часах, который оказался полностью бесполезен на практике, да и вообще Гюйгенс мог считать себя неудачником, так как не смог решить главной своей задачи — создать морской хронометр (очень многое из того, что сегодня рассматривается как его основные заслуги, было лишь средством для построения морских часов). Самые великие люди не защищены от ошибок в прогнозах. А ведь иногда ученому приходится принимать критическое решение — прервать одни исследования в пользу других. Так, Галилей отказывается от доведения до публикации результатов своих двадцатилетних исследований по механике, вначале отвлекшись на год для астрономических наблюдений, а затем он на двадцать лет вообще, по существу, прекратил научные исследования в собственном смысле слова ради популяризации гелиоцентрической системы. Через полтора века опять-таки ради астрономии оставляет неопубликованными свои исследования по эллиптическим функциям Гаусс. Вероятно, оба они не предвидели, сколь долгим будет перерыв, и оба не видели кругом никого, кто мог бы угрожать их приоритету. Галилей все же успел (через 30 лет!) опубликовать свои работы

по механике, когда приговор инквизиции закрыл для него возможности для других занятий (и лишь сообщение Кавальери о параболичности траектории брошенного тела, хотя и не посягавшее на приоритет Галилея, заставило его немного поволноваться). Гаусс опять-таки 30 лет не находил времени завершить свои результаты и они были переоткрыты Абелем и Якоби.

Отбор материала и характер изложения диктовался тем, что книга и предшествующие ей статьи адресованы любителям математики и физики, в первую очередь, школьникам. Мы всегда отдавали приоритет точному изложению конкретных достижений ученых (работы Галилея по механике, математические и механические исследования Гюйгенса в связи с маятниковыми часами, две первые математические работы Гаусса). К сожалению, это не всегда возможно, даже если речь идет о давних работах. Нет большего удовольствия, чем следить за полетом мысли гения, как бы давно он ни жил. Дело не только в том, что любителю физики или математики это недоступно в отношении современных работ. Уметь почувствовать революционный характер старого достижения — важный элемент культуры. Высокомерие по отношению к давно жившим людям — опасная черта. Рассказывая детям о великих открытиях, мы часто не учим их этим открытиям удивляться.

Мы хотим подчеркнуть, что собранные в книге рассказы не носят характер историко-научных текстов. Это проявляется в сильной адаптации исторических реалий. Мы свободно модернизируем рассуждения ученых: пользуемся алгебраической символикой в доказательствах Кардано, вводим ускорение свободного падения в выкладки Галилея и Гюйгенса (чтобы не мучить читателя бесконечными пропорциями), работаем с натуральными логарифмами вместо неперовых при рассказе об открытии Непера, пользуемся поздними высказываниями Галилея, чтобы реконструировать логику его ранних исследований по механике. Всюду мы сознательно пренебрегали деталями, уместными в работе по истории науки, с тем чтобы выпукло изложить небольшое число основных идей.

* * *

В настоящем издании внесены исправления редакционного характера и устранены замеченные неточности и опечатки.

«ВЕЛИКОЕ ИСКУССТВО»

В 1545 г. вышла книга Джероламо Кардано, название которой начиналось этими словами (по латыни *«Ars magna»*). В основном она была посвящена решению уравнений 3-й и 4-й степеней, однако ее значение для истории математики выходило далеко за пределы этой конкретной задачи. Уже в XX веке Феликс Клейн, оценивая книгу, писал: «Это в высшей степени ценное произведение содержит зародыш современной алгебры, выходящей за пределы античной математики».

XVI век был веком возрождения европейской математики после средневековой спячки. На тысячу лет были забыты, а частично безвозвратно утрачены, труды великих греческих геометров. Из арабских текстов европейцы узнавали не только о математике Востока, но и об античной математике. Характерно, что в распространении математики в Европе большую роль сыграли купцы, для которых поездки были средством и получения информации, и ее распространения. Особенно выделяется фигура Леонардо из Пизы (1180—1240), более известного как Фибоначчи (сын Боначчи). Его имя увековечено в названии замечательной числовой последовательности (числа Фибоначчи). Наука может утратить высочайший уровень очень быстро. Для его восстановления могут потребоваться века. Три века европейские математики оставались учениками, хотя у того же Фибоначчи были, безусловно, интересные наблюдения. Лишь в XVI веке в Европе появились математические результаты принципиального значения, которых не знали ни античные, ни восточные математики. Речь идет о решении уравнений 3-й и 4-й степеней.

Характерно, что достижения новой европейской математики относятся к алгебре, новой области математики, пришедшей с Востока и, по существу, делавшей только первые шаги. По крайней мере, еще сто лет

математикам Европы будет не по силам не только сделать в геометрии что-нибудь сопоставимое с достижениями Евклида, Архимеда, Аполлония, но даже усвоить до конца результаты великих геометров.

Легенда приписывает Пифагору фразу: «Все есть число». Но после Пифагора в греческой математике постепенно все подчинила геометрия. В геометрической форме имелись у Евклида и элементы алгебры. Например, квадрат разрезался прямыми, параллельными сторонам, на два меньших квадрата и два равных прямоугольника. Из сопоставления площадей получалась формула $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$. Но, разумеется, символики не было, и формулировка с площадями оставалась окончательной. Формулировки получались очень громоздкими. Задачи на построение циркулем и линейкой, по существу, приводили к решению квадратных уравнений и рассмотрению выражений, содержащих квадратные корни (квадратичных иррациональностей). Например, у Евклида (на другом языке) подробно исследуются выражения вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. В определенной степени греческие геометры понимали связь классических неразрешимых задач на построение (удвоение куба и трисекция угла) с кубическими уравнениями.

У арабских математиков алгебра постепенно отрывается от геометрии. Хотя, как мы увидим ниже, решение кубического уравнения было получено геометрическим путем (алгебраический вывод формул для решения даже квадратного уравнения появился лишь в 1572 г. у Бомбелли). Алгебраические утверждения появляются у арабских математиков как рецепты для решения однотипных арифметических задач обычно с «житейским» содержанием (например, задачи на раздел наследства). Правила формулируются на конкретных примерах, но с таким расчетом, чтобы можно было решить похожую задачу. До последнего времени так иногда формулировались правила решения арифметических задач («тройное правило» и т. д.). Формулировка правил в общем виде почти неминуемо требует развитой символики, до которой было еще далеко. Арабские математики не пошли дальше решения квадратных уравнений и некоторых специально подобранных кубических.

Проблема решения кубических уравнений волновала как арабских математиков, так и их европейских учеников. Удивительный результат в этом направлении принадле-

жит Леонардо Пизанскому. Он показал, что корни уравнения $x^3+2x^2+10x=20$ не могут быть выражены через евклидовские иррациональности вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. Поразительная для начала XIII века постановка задачи, предвещавшая проблему разрешимости в радикалах, осмысленную значительно позже. Путей же к решению общего кубического уравнения математики не видели.

Состояние математики на рубеже XV—XVI веков было подытожено в книге Луки Пачоли (1445—1514) «Сумма арифметики» (1494 г.), одной из первых печатных книг по математике, написанной к тому же не на латыни, а на итальянском языке. В конце книги говорится, что для решения кубических уравнений «искусством алгебры еще не дан способ, как не дан способ квадратуры круга». Сравнение звучит внушительно, а авторитет Пачоли был настолько велик, что большинство математиков (как мы увидим, среди них в начале были и наши герои) считало, что кубические уравнения в общей ситуации решить вообще нельзя.

СЦИПИОН ДЕЛЬ ФЕРРО. Нашелся человек, которого мнение Пачоли не остановило. Это был профессор математики в Болонье Сципион дель Ферро (1465—1526); он нашел способ решать уравнения

$$x^3+ax=b. \tag{1}$$

Отрицательными числами тогда еще не пользовались и, например, уравнение

$$x^3=ax+b \tag{2}$$

воспринималось как совсем другое! Об этом решении известны лишь косвенные сведения. Дель Ферро сообщил его своему зятю и преемнику по кафедре Аннибалу делла Наве и ученику Антонио Марио Фиоре. Последний решил после смерти учителя воспользоваться доверенной ему тайной, чтобы стать непобедимым в поединках по решению задач, которые были тогда очень распространены. 12 февраля 1535 г. его жертвой едва не стал Никколо Тарталья — один из главных героев нашего рассказа.

НИККОЛО ТАРТАЛЬЯ. Тарталья родился около 1500 г. в Брешии в семье бедного конного почтальона Фонтане. В детстве, когда его родной город был захвачен французами, он был ранен в гортань и с тех пор говорил с трудом. Отсюда и его прозвище «Тарталья» («заика»). Он рано остался на попечении матери, которая попыталась учить его в школе. Но деньги кончились, когда



Никколо Тарталья (единственный известный портрет), 1500 (?) — 1557.

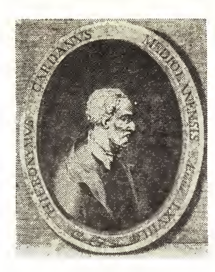
в классе письма дошли до буквы «к». Тарталья покинул школу, не научившись писать свою фамилию. Он продолжает заниматься самостоятельно и становится «магистром абака» (что-то вроде учителя арифметики в частном коммерческом училище). Он много ездит по Италии, пока в 1534 г. не попадает в Венецию. Здесь его научные занятия стимулировались общением с инженерами и артиллеристами из знаменитого венецианского арсенала. Тарталью спрашивают, например, как надо наклонить орудие, чтобы оно стреляло дальше всего. Он дает ответ, который показался спрашивавшим удивительным,— под углом 45°. Ему не верят, что надо поднять ствол так высоко, но «несколько частных опытов» доказали его правоту. Хотя Тарталья говорит, что у него были «математические доводы» для этого утверждения, скорее это было эмпирическое наблюдение (а доказательство дал лишь Галилей).

Тарталья публикует две книги, служащие продолжением одна другой: «Новая наука» (1537 г.) и «Проблемы и различные изобретения» (1546 г.), где читателю обещаются «...новые изобретения, не краденные ни у Платона, ни у Плотина, ни у какого иного грека и латинянина, а полученные лишь искусством, измерением и разумом». Книги написаны на итальянском языке, в форме диалога, которую позднее перенял Галилей. В ряде вопросов Тарталья был предшественником Галилея. Хотя в первой из указанных книг он повторял вслед за Аристотелем, что брошенное под углом тело вначале летит по наклонной прямой, затем по дуге окружности и, наконец, по вертикали падает вниз; во второй книге он пишет, что траектория «не имеет ни одной части, которая была бы совершенно прямой». Тарталья интересовался равновесием тел

на наклонной плоскости, свободным падением тел (его ученик Бенедетти убедительно показал, что характер падения тела не должен зависеть от веса). Важную роль сыграли выполненные Тарталья переводы Архимеда и Евклида на итальянский язык (Тарталья называет его «народным» в отличие от латыни), его подробные комментарии. По своим человеческим качествам Тарталья был далеко не безупречен, очень труден во взаимоотношениях. Бомбелли (правда, человек не беспристрастный; о нем ниже) писал, что «этот человек по натуре своей был так склонен говорить только дурное, что даже хуля кого-либо считал, что дает ему лестный отзыв». По другим свидетельствам (Нуньес) «он временами бывал так возбужден, что казался умалишенным».

Вернемся к предстоящему поединку. Тарталья был опытным бойцом и надеялся одержать над Фиоре легкую победу. Он не испугался и тогда, когда обнаружил, что все 30 задач Фиоре содержат уравнения (1) при разных a и b. Тарталья думал, что Фиоре не умеет сам решать предложенные задачи, и надеялся разоблачить его: «Я думал, что ни одна из них не может быть решена, потому что брат Лука (Пачоли — *С. Г.*) уверяет в своем труде, что такого рода уравнения невозможно решить общей формулой». Когда уже почти истекли 50 дней, после которых надлежало сдать решения нотариусу, до Тартальи дошли слухи, что Фиоре обладает таинственным способом решения уравнения (1). Перспектива угощать парадным обедом друзей Фиоре в количестве, равном числу задач, решенных победителем (таковы были правила!), не привлекала Тарталью. Он прилагает титанические усилия и счастье улыбается ему за восемь дней до назначенного срока (срок истекал 12 февраля 1535 г.): желанный способ найден! За два часа Тарталья решил все задачи. Противник его не решил ни одной. Странным образом он не справился с одной задачей, которую можно было решить по формуле дель Ферро (Тарталья дал задачу, имея в виду искусственный прием). Впрочем мы увидим, что формулой нелегко пользоваться. Через день Тарталья нашел способ решать уравнения (2).

О поединке Тарталья — Фиоре знали многие. В этой ситуации секретное оружие могло не помочь, а помешать Тарталье в дальнейших поединках. Кто согласится состязаться с ним, если исход предрешен? Все же Тарталья



Джероламо Кардано
(в возрасте 68 лет), 1501—1576.

отвергает несколько просьб раскрыть его способ решать кубические уравнения. Но нашелся проситель, который добился своего. Это был Джероламо Кардано, второй герой нашего рассказа.

ДЖЕРОЛАМО КАРДАНО. Он родился 24 сентября 1501 г. в Павии. Его отец — Фацио Кардано, образованный юрист с широкими интересами, упоминается у Леонардо да Винчи. Он был первым учителем сына. Окончив университет в Падуе, Джероламо решает посвятить себя медицине. Он был незаконнорожденным ребенком, и это закрыло ему доступ в коллегию врачей Милана. Кардано долго практиковал в провинции, пока в августе 1539 г. его все же не приняли в коллегию, специально изменив для этого правила. Кардано был одним из самых знаменитых врачей своего времени, вероятно, вторым после Андрея Везалия, его друга. На склоне лет Кардано написал свою автобиографию («О моей жизни»). В ней считанные упоминания о занятиях математикой, зато подробно описываются исследования по медицине. Он утверждал, что описал приемы излечения до пяти тысяч трудно лечимых болезней, что число разрешенных им проблем и вопросов доходит до сорока тысяч, а более мелких указаний — до двухсот тысяч. Конечно, к этим цифрам следует относиться с должной долей скептицизма. Все же слава Кардано-врача была несомненной. Он описывает случаи из своей медицинской практики, делая нажим на лечение знатных особ (шотландского архиепископа Гамильтона, кардинала Марона и т. д.), утверждая, что его постигли лишь три неудачи. По-видимому, если прибегнуть к современной терминологии, он был выдающимся диагностом, но не обращал большого внимания на анатомические сведения, как это делали Леонардо да Винчи и Везалий.

В автобиографии Кардано сопоставляет себя с Гиппократом, Галеном, Авиценной (мысли последнего были ему особенно близки).

Однако занятия медициной не поглощали Кардано полностью. В свободное время он занимался всем на свете. Например, составлял гороскопы живых и мертвых (Христа, английского короля Эдуарда VI, Петрарки, Дюрера, Везалия, Лютера). Эти занятия сильно повредили Кардано в глазах потомков (по одной недоброй легенде он покончил жизнь самоубийством, чтобы подтвердить свой собственный гороскоп). Но следует помнить, что в те времена занятия астрологией считались вполне респектабельными (астрономия воспринималась как часть астрологии — натуральная астрология в отличие от юдициарной). Услугами Кардано-астролога пользовался папа.

В своей научной деятельности Кардано был энциклопедистом, однако энциклопедистом-одиночкой, что характерно для эпохи Возрождения. Лишь через полтора века появились первые академии, в которых ученые специализировались в более или менее узких областях. Только в таких коллективах можно было создавать подлинные энциклопедии. Энциклопедист-одиночка не в состоянии в достаточной степени проконтролировать все сообщаемые им сведения. В случае Кардано большую роль играли особенности его личности, его психического склада. Он верил в чудеса, предчувствия, демонов, в свои собственные сверхъестественные возможности. Он подробно описывает события, убедившие его в этом (при любых столкновениях в его присутствии не проливалась кровь ни у людей, ни у животных, даже на охоте; о всех событиях, кончившихся гибелью его сына, он узнавал заранее по приметам и т. д.). Кардано считал, что он обладал даром озарения (гарпократическим чувством, как он его называл), который позволял ему угадывать пораженный орган у больного, кости, которые выпадут в игре, видеть печать смерти на лице у собеседника. Большую роль в жизни Кардано играли сновидения, которые он запоминал с мельчайшими деталями и подробно описывал. По этим описаниям современные психиатры пытались определить болезнь Кардано. Кардано пишет, что постоянно повторяющиеся сновидения вместе с желанием увековечить свое имя служили основными поводами для написания книг. В энциклопедиях Кардано «О тонких мате-

риях», «О разнообразии вещей» описанию снов автора и его отца уделено много места.

Но в этих книгах содержится и много собственных наблюдений и тщательно продуманных сообщений других. Готовность обсуждать фантастические теории, своеобразная доверчивость играют не только отрицательную роль; благодаря им он обсуждает вещи, о которых его более осторожные коллеги решились говорить на много лет позже (см. ниже о комплексных числах). Не всегда удается проследить авторство. Не ясно (это относится и к другим итальянским авторам XVI века), в какой мере Кардано был знаком с трудами Леонардо да Винчи (широкой публике они стали известны лишь в самом конце XVIII века). Книга «О тонких материях», переведенная во Франции, служила популярным учебником по статике и гидростатике в течение всего XVII века. Галилей пользовался указанием Кардано об использовании собственного пульса для измерения времени (в частности, при наблюдении над качением люстры в соборе). Кардано утверждал, что невозможен вечный двигатель, некоторые его замечания можно интерпретировать как принцип возможных перемещений (так считает известный историк физики Дюэм), он рассматривал расширение водяного пара. Кардано разделял созданную еще в III веке до н. э. теорию, объяснявшую приливы и отливы действием Луны и Солнца. Он впервые четко провел различие между притяжениями магнитным и электрическим (разумеется, имеются в виду явления типа наблюдавшегося еще Фалесом притяжения соломинок натертым янтарем).

Кардано был не чужд и экспериментальным исследованиям и конструированию практических механизмов. На склоне лет он при помощи опыта установил, что отношение плотности воздуха к плотности воды равно 1/50. Когда в 1541 г. испанский король Карл V триумфально вошел в завоеванный Милан, ректор коллегии врачей Кардано шел рядом с балдахином. В ответ на оказанную честь он предложил снабдить королевский экипаж подвеской из двух валов, качение которых не выведет карету из горизонтального положения (в империи Карла V дороги были дальние и плохие). Ныне такая система подвески называется карданом (карданный подвес, карданный вал, карданное сочленение) и применяется в автомобилях. Справедливость требует отметить, что идея такой системы восходит к античности и что, по

крайней мере, в «Атлантическом кодексе» Леонардо да Винчи имеется рисунок судового компаса с карданным подвесом. Такие компасы получили распространение в первой половине XVI века, по-видимому, без влияния Кардано.

Кардано писал огромное число книг, часть из которых была напечатана, часть осталась в рукописи, а часть была уничтожена им в Риме в ожидании ареста. Только описание книг составило объемистую книгу «О собственных сочинениях». Многие годы были популярны книги Кардано по философии и этике. Книга «Об утешении» была переведена на английский язык и оказала влияние на Шекспира. Некоторые шекспироведы утверждают даже, что Гамлет произносит монолог «Быть или не быть...», держа эту книгу в руках.

Можно много говорить о личности Кардано. Он был страстен, вспыльчив, много играл в азартные игры. Сорок лет играл Кардано в шахматы («я никогда не мог выразить в кратких словах, сколько ущерба, без всякого за него возмещения, причинили они моим домашним делам»), двадцать пять лет играл он в кости («но еще более шахмат повредили мне кости»). Ради игры временами бросал он все занятия, попадал в неприятные ситуации. Побочным продуктом этой страсти Кардано была «Книга об игре в кости», написанная в 1526 г., но напечатанная лишь в 1663 г. Эта книга содержит начала теории вероятностей, включая предварительно формулировку закона больших чисел, некоторые вопросы комбинаторики, наблюдения над психологией игроков.

Несколько слов о характере Кардано. Он сам пишет: «...среди моих пороков исключительным и крупным является тот, который заставляет меня не говорить ни о чем с таким удовольствием, как о том, что, как я знаю, окажется неприятным моим слушателям. И я сознательно и упорно коснею в этом... Я допустил много ошибок, на которые подбивала меня моя наклонность всюду кстати и некстати сообщать обо всем мне известном... К этому меня побуждало не только опрометчивое легкомыслие и незнакомство с делами..., но и пренебрежительное отношение к тем приличиям, которые в большинстве случаев соблюдаются между людьми благовоспитанными и которые я усвоил только впоследствии». Для друзей и учеников он умел быть и другим. Бомбелли писал, что

Кардано имел «скорее божественный, чем человеческий облик».

КАРДАНО И ТАРТАЛЬЯ. К 1539 г. Кардано заканчивает свою первую математическую книгу «Практика общей арифметики»; она была призвана заменить книгу Пачоли. Услышав о секрете Тартальи, он загорелся желанием украсить им свою книгу. По его просьбе книготорговец Жуано Антонио встретился с Тартальей в Венеции 2 января 1539 г. Он просит от имени «честного человека, врача города Милана, по имени Джероламо Кардано» передать правило решения уравнения (1) или для опубликования в книге, или под обещание держать сообщенное в секрете. Ответ был отрицательным: «Передайте его светлости, чтобы он простил меня, но если я захочу опубликовать свое открытие, то я сделаю это в моем собственном труде, а не в книге другого». Тарталья отказался передать также решения 30 задач Фиоре, передав лишь условия (впрочем их можно было получить у нотариуса), а также решить 7 задач, посланных Кардано. Тарталья подозревает, что Кардано — подставное лицо, за которым скрывается математик Жуане да Кои, давно безуспешно пытающийся узнать секрет.

12 февраля Кардано посылает Тарталье критические замечания по поводу книги «Новая наука» и повторяет свою просьбу. Тарталья неумолим, соглашаясь решить лишь две задачи Кардано. 13 марта Кардано приглашает Тарталью к себе, выражает заинтересованность в его артиллерийских приборах, обещает представить его маркизу дель Васто, испанскому губернатору Ломбардии. Повидимому, эта перспектива прельстила Тарталью, он принял приглашение и решительное объяснение состоялось 25 марта в доме Кардано.

Вот отрывок из записи этой беседы (следует иметь в виду, что запись сделана Тартальей; ученик Кардано Феррари утверждает, что она не вполне соответствует действительности):

«Н и к к о л о. Я говорю Вам: я отказал Вам не из-за одной только этой главы и сделанного в ней открытия, но из-за тех вещей, которые можно открыть, зная его, так как это ключ, отмыкающий путь для исследования бесчисленного количества других разделов. Я бы уже давно нашел общее правило для многих других проблем, если бы не был в настоящее время занят переводом Евклида на народный язык (в настоящее время я довел перевод

до конца 13-й книги). Но когда эта работа, которую я уже начал, будет закончена, я собираюсь издать труд для практического применения вместе с новой алгеброй... Если я выдам ее какому-нибудь теоретику (каким является Ваша светлость), то он легко может с помощью этого объяснения найти другие главы (ибо это объяснение легко приложить к другим вопросам) и опубликовать плоды моего открытия под собственным именем. Этим будут разбиты все мои планы.

Мессер Джероламо. Я клянусь Вам святым евангелием господа бога и не только даю Вам слово честного человека никогда не опубликовать этого Вашего открытия, если Вы мне его доверите, но обещаю, и да будет моя совесть истинного христианина Вам порукой, зашифровать его так, что после моей смерти никто не сможет прочитать написанное. Если я, по Вашему мнению, заслуживаю доверия, то сделайте это, если нет, то оставим этот разговор.

Никколо. Если бы я не поверил этой Вашей клятве, то, конечно, заслужил бы того, чтобы меня самого сочли неверующим».

Итак, Тарталья дал уговорить себя. Он сообщил свое решение в форме латинского стихотворения. Не правда ли, трудно понять по приведенной записи, что́ заставило Тарталью изменить решение. Неужели его так потрясли клятвы Кардано? Происходящее дальше мало понятно. Сообщив тайну, взволнованный Тарталья немедленно уезжает, отказавшись от свидания с маркизом, ради которого он предпринимал путешествие. Уж не загипнотизировал ли его Кардано? Очень правдоподобно, что запись Тартальи не точна.

Тарталья несколько успокоился, когда получил 12 мая свеженапечатанную «Практику общей арифметики» без своего рецепта. В сопроводительном письме Кардано пишет: «Я проверил формулу и считаю, что она имеет общее значение».

Кардано получил от Тартальи готовый способ решения уравнения (1) без всяких намеков на доказательство. Он затратил много сил на тщательную проверку и обоснование правила. С нашей колокольни нелегко понять, в чем проблема: подставь в уравнение и проверь! Однако отсутствие развитой алгебраической символики делало то, что сегодня автоматически выполняет любой школьник, доступным лишь избранным. Не познакомившись с под-

линными текстами того времени, нельзя оценить, насколько алгебраический аппарат «экономит» мышление. Читатель должен все время иметь это в виду, чтобы не заблуждаться относительно «тривиальности» проблем, вокруг которых кипели страсти в XVI веке.

Кардано затрачивает годы напряженной работы, пытаясь полностью разобраться с решением кубических уравнений. Он получил рецепты (ведь формул писать не умели!) для решения уравнений (1), (2), а также

$$x^3 + b = ax \qquad (3)$$

и уравнений, содержащих x^2. Он наверняка сильно опередил Тарталью. Все это происходило на фоне упрочения положения Кардано; в 1543 г. он становится профессором в Павии. «Мои познания в астрологии,— писал Кардано,— приводили меня к заключению, что я не проживу более сорока лет и уж, во всяком случае, не достигну сорокапятилетнего возраста... Наступил тот год, который должен был стать последним в моей жизни и который, напротив, оказался ее началом,— а именно сорок четвертый год».

ЛУИДЖИ ФЕРРАРИ. В математических занятиях Кардано с некоторых пор ему помогал Луиджи Феррари (1522—1565). В составленном Кардано списке его 14 учеников Феррари фигурирует как второй в хронологическом порядке и один из трех наиболее выдающихся. Кардано, веривший приметам, пишет, что 14 ноября 1536 г., когда 14-летний Луиджи с братом прибыли в Болонью, «во дворе так долго вопреки обычаю стрекотала сорока, что мы все ждали чьего-нибудь приезда». Феррари был человеком феноменальных способностей. Он обладал таким бурным темпераментом, что даже Кардано боялся временами с ним говорить. Известно, что в семнадцать лет Феррари вернулся после одной прогулки без единого пальца на правой руке. Он был безоговорочно предан учителю, долгое время был его секретарем и поверенным. Вклад Феррари в математические работы Кардано очень велик.

В 1543 г. Кардано вместе с Феррари предпринял поездку в Болонью, где делла Наве позволил им познакомиться с бумагами покойного дель Ферро. Они убедились, что последнему уже было известно правило Тартальи. Интересно, что о формуле дель Ферро, по-видимому,

почти не знали. Вряд ли Кардано так энергично атаковал бы Тарталью, знай он, что ту же информацию можно получить у делла Наве (до 1543 г. он к нему не обращался). Сейчас почти все соглашаются, что у дель Ферро была формула, что Фиоре знал ее, а Тарталья переоткрыл ее, зная, что у Фиоре она есть. Однако ни один из шагов в этой цепочке строго не доказан! Кардано говорил об этом, но Тарталья писал в конце своей жизни: «...я могу заверить, что эта описанная теорема не была еще доказана ни Евклидом, ни кем-либо другим, а одним лишь Джероламо Кардано, которому мы ее показали... В 1534 г. (в другом месте написано, что 4 февраля 1535 г.— *С. Г.*) я нашел в Венеции общую формулу уравнения...». Трудно свести концы с концами в этой запутанной истории.

«ВЕЛИКОЕ ИСКУССТВО». Знакомство ли с бумагами дель Ферро, сильное ли давление со стороны Феррари или, скорее всего, нежелание похоронить результаты многолетней работы привели к тому, что Кардано включил все известное ему о кубических уравнениях в вышедшую в 1545 г. книгу «Великое искусство или о правилах алгебры». Ее стали называть коротко «Великое искусство».

В предисловии Кардано излагает историю вопроса: «...в наше время Сципион дель Ферро открыл формулу, согласно которой куб неизвестного плюс неизвестное равен числу. Это была очень красивая и замечательная работа. Так как это искусство превосходит всю человеческую ловкость и всю ясность ума смертного, то его нужно рассматривать как подарок небесного происхождения, а также как способность силы ума, и это настолько славное открытие, что от того, кто мог его достигнуть, можно ждать, что он достигнет всего. Соревнуясь с ним, Никколо Тарталья из Брешии, наш друг, будучи вызван на состязание с учеником дель Ферро по имени Антонио Марио Фиоре, решил, дабы не быть побежденным, ту же самую проблему и после долгих просьб передал ее мне. Я был введен в заблуждение словами Луки Пачоли, который говорит, что нет общего решения такого рода уравнений, и, хотя я обладал уже многими, мною самим сделанными открытиями, я все же не отчаивался найти то, чего я не смел искать. Однако, когда я получил эту главу и добрался до ее решения, то я увидел, что с ее помощью можно многое сделать еще; и уже с повышенной уверенностью в своих делах я, при исследовании, открыл дальней-

шее, частью сам, частью с Луиджи Феррари, моим бывшим учеником».

В модернизированном виде способ, которым Кардано находит решение уравнения (1), можно изложить следующим образом. Будем искать решение уравнения (1) в виде $x=\beta-\alpha$. Тогда $x+\alpha=\beta$ и

$$x^3+3x^2\alpha+3x\alpha^2+\alpha^3=\beta^3. \quad (4)$$

Поскольку $3x^2\alpha+3x\alpha^2=3x\alpha(x+\alpha)=3x\alpha\beta$, равенство (4) можно переписать в виде

$$x^3+3\alpha\beta x=\beta^3-\alpha^3. \quad (5)$$

Попытаемся по паре (a, b) так подобрать пару (α, β), чтобы (5) совпало с (1). Для этого необходимо, чтобы пара (α, β) была решением системы

$$3\alpha\beta=a, \qquad \beta^3-\alpha^3=b$$

или равносильной ей системы

$$\beta^3\cdot(-\alpha^3)=-\frac{a^3}{27}, \quad \beta^3+(-\alpha^3)=b.$$

По теореме Виета *) β^3 и $-\alpha^3$ будут корнями вспомогательного квадратного уравнения $y^2-by-\frac{a^3}{27}=0$. Поскольку мы ищем положительные корни уравнения (1), $\beta>\alpha$. Значит,

$$\beta^3=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}, \quad -\alpha^3=\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}.$$

Следовательно,

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}.$$

При положительных a и b корень x также положителен.

Приведенная выкладка лишь в идейном отношении следует ходу рассуждений Кардано. Сам он рассуждает на геометрическом языке: если куб со стороной $\beta=\alpha+x$ разрезать плоскостями, параллельными граням, на куб со стороной α и куб со стороной x, получатся, кроме двух

*) Сам Виет (1540—1603) жил позже Кардано, но тот частный случай его теоремы, который в школе называют теоремой Виета, был, по существу, известен Кардано.

кубов, три прямоугольных параллелепипеда со сторонами α, α, x и три — со сторонами α, x, x; соотношение между объемами дает (4); для перехода к (5) параллелепипеды разных типов попарно объединяются. «Так как я сознавал, что тот отдел, который передал мне Тарталья, был открыт им при помощи геометрического доказательства, то я думал, что это и есть царский путь, ведущий ко всем другим отделам». Возможно, Кардано было известно аналогичное рассуждение для квадратного уравнения, принадлежащее Ал-Хорезми.

Уравнение (2) можно решить при помощи подстановки $x=\beta+\alpha$, но здесь уже может возникнуть случай, когда исходное уравнение имеет три действительных корня, а вспомогательное квадратное уравнение не имеет действительных корней. Это так называемый *неприводимый* случай. Он доставил много хлопот Кардано (и, вероятно, Тарталье).

Кардано решил уравнение (3), проведя смелое по тем временам рассуждение, обыгрывающее отрицательность корня. Никто до него не пользовался так решительно отрицательными числами, хотя и Кардано еще далек от свободного обращения с ними: уравнения (1) и (2) он рассматривает отдельно!

Кардано полностью разобрался и с общим кубическим уравнением $x^3+ax^2+bx+c=0$, заметив, говоря на современном языке, что подстановка $x=y-a/3$ уничтожает член с x^2.

Кардано решается рассматривать не только отрицательные числа (он называет их «чисто ложными»), но и комплексные (их он называет «поистине софистическими»). Он замечает, что если с ними оперировать по некоторым естественным правилам, то квадратному уравнению, не имеющему действительных корней, можно приписать комплексные корни. Возможно, к комплексным числам Кардано пришел в связи с неприводимым случаем. (Это предполагает, например, Н. Бурбаки.) Если в этом случае «не пугаясь» выполнить все действия над возникающими в процессе вычислений комплексными числами, то в результате получатся правильные значения вещественных корней. Но нет никаких указаний на то, что Кардано вышел в своих рассмотрениях за пределы квадратных уравнений. Однако приведенное рассуждение о кубическом уравнении вскоре появилось — у Рафаэля Бомбелли (1526—1573), последователя Кардано — инже-

нера-гидравлика из Болоньи и автора знаменитой «Алгебры» (1572 г.).

Кардано понимал, что кубическое уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ может иметь три вещественных корня и что тогда их сумма равна $-a$. В такого рода общих утверждениях у Кардано не было предшественников. В алгебре в отличие от геометрии почти не приводили доказательств (в школьной математике следы этого сохранились по сей день!). Вот еще одно наблюдение Кардано: если в уравнении (с положительными коэффициентами) все члены в левой части имеют большую степень, чем все члены в правой, то имеется единственный положительный корень. От «Великого искусства» идет целый ряд важных для алгебры понятий, например, кратность корня. Вообще, значение Кардано в истории математики определяется, в первую очередь, не конкретными достижениями (которых у него не очень много), а тем, что в «Великом искусстве» он увидел путь, по которому будет развиваться алгебра.

ЗАМЕЧАНИЕ О ФОРМУЛЕ КАРДАНО. Проанализируем формулу для решения уравнения $x^3+px+q=0$ в вещественной области. В отличие от Кардано мы можем себе позволить не следить за знаками p, q. Итак,

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

При вычислении x нам приходится извлекать вначале квадратный корень, а затем кубический. Мы сможем извлечь квадратный корень, оставаясь в вещественной области, если $\Delta=27q^2+4p^3>0$. Два значения квадратного корня, отличающиеся знаком, фигурируют в разных слагаемых для x. Значение кубического корня в вещественной области единственно и получается единственный вещественный корень x при $\Delta>0$.

Исследуя график кубического трехчлена x^3+px+q, нетрудно убедиться, что он в самом деле имеет единственный вещественный корень при $\Delta>0$. При $\Delta<0$ имеются три вещественных корня. При $\Delta=0$ имеется двукратный вещественный корень и однократный, а при $p=q=0$ — трехкратный корень $x=0$.

Продолжим исследование формулы при $\Delta>0$ (случай одного вещественного корня). Оказывается, что если при этом уравнение с целыми коэффициентами имеет целочисленный корень, при вычислении его по формуле могут

возникнуть промежуточные иррациональности. Например, уравнение $x^3+3x-4=0$ имеет единственный вещественный корень $x=1$. Формула Кардано дает для этого единственного вещественного корня выражение

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Значит,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1.$$

Но попробуйте это доказать непосредственно! Возможно, вы найдете искусственный путь, но при прямых преобразованиях будут возникать неистребимые кубические радикалы.

Быть может, это обстоятельство объясняет, почему Фиоре не смог решить предложенное Тарталья кубическое уравнение. Вероятно, его можно было решить, угадав ответ (что имел в виду Тарталья), а рецепт дель Ферро приводил к промежуточным иррациональностям.

Еще запутаннее ситуация в случае трех вещественных корней. Этот случай называется неприводимым. Здесь $\Delta=27q^2+4p^3<0$ и под знаками кубических корней получаются комплексные числа. Если извлечь кубические корни в комплексной области, то после сложения мнимые части уничтожаются и получатся вещественные числа. Но как свести все к операциям над вещественными числами? Например, извлечение квадратного корня $\sqrt{a+ib}$ можно свести к чисто вещественным операциям над a и b. Если бы так обстояло дело с вычислением $\sqrt[3]{a+ib}=u+iv$, то все было бы в порядке. Но при выражении u, v через a, b возникают снова кубические уравнения, причем в неприводимой ситуации. Получается заколдованный круг! В результате в неприводимом случае нельзя найти выражение для корней через коэффициенты, не выводящие за пределы вещественной области. В этом смысле кубическое уравнение с тремя вещественными корнями неразрешимо в радикалах в вещественной области (в отличие от квадратного). На это обстоятельство часто не обращают должного внимания.

УРАВНЕНИЕ 4-Й СТЕПЕНИ. В «Великом искусстве» был отражен и личный вклад Феррари — решение уравнения 4-й степени.

На современном языке метод Феррари решения уравнения

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (6)$$

(полное уравнение четвертой степени легко сводится к уравнению (6)) состоит в следующем.

Введя вспомогательный параметр t, перепишем уравнение (6) в равносильной форме:

$$(x^2 + \frac{a}{2} + t)^2 = 2tx^2 - bx + \left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right). \qquad (7)$$

Подберем теперь значение параметра t так, чтобы квадратный (относительно x) трехчлен, стоящий в правой части уравнения (7), имел два совпадающих корня. Для этого нужно, чтобы дискриминант этого трехчлена равнялся нулю:

$$b^2 - 4 \cdot 2t\left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right) = 0.$$

Мы получили вспомогательное кубическое уравнение для t. Найдем по формуле Кардано какой-нибудь его корень t_0. Уравнение (7) можно теперь переписать так:

$$(x^2 + \frac{a}{2} + t_0)^2 = 2t_0\left(x - \frac{b}{4t_0}\right)^2. \qquad (8)$$

Уравнение (8) распадается на пару квадратных уравнений, дающих четыре искомых корня.

Таким образом, согласно методу Феррари, решение уравнения четвертой степени сводится к решению вспомогательного кубического уравнения и двух квадратных уравнений.

ФЕРРАРИ И ТАРТАЛЬЯ. После встречи в 1539 г. Кардано и Тарталья переписывались мало. Однажды ученик сообщил Тарталье, что, по слухам, Кардано пишет новую книгу. Тарталья сразу пишет Кардано предостерегающее письмо, но получает успокаивающий ответ. В другой раз Кардано захотел получить разъяснения, натолкнувшись на неприводимый случай, но ничего содержательного в ответ не получил. Нетрудно себе представить, какое впечатление произвел на Тарталью выход в свет «Великого искусства» (1545 г.). В последней части своей книги «Проблемы и различные изобретения» (1546 г.) Тарталья публикует переписку и записи бесед, относящихся к взаимоотношениям с Кардано, и обрушивается на него с бранью и упреками. Кардано не реагирует на выпад, но

10 февраля 1547 г. Тарталье отвечает Феррари. Он возражает против упреков Тартальи, указывает на недочеты в его книге, в одном случае упрекает его в присвоении чужого результата, в другом находит повторения, свидетельствующие о плохой памяти (похоже, что по тем временам, это тяжелое обвинение). В заключение Тарталья вызывается на публичный диспут по «геометрии, арифметике или связанным с ними дисциплинам таким, как Астрология, Музыка, Космография, Перспектива, Архитектура и др.». Он готов дискутировать не только о том, что написано в этих областях греческими, латинскими или итальянскими авторами, но и о работах самого Тартальи, если тот, в свою очередь, согласится обсуждать работы Феррари.

По традиции в ответ на «Картель» (вызов) посылались «Вопросы». Они и появились 19 февраля. Тарталья хочет втянуть в перепалку самого Кардано: «Я писал Вам в таком горячем и оскорбительном тоне для того, чтобы заставить его светлость (а не Вас) собственноручно написать кое-что, ибо у меня с ним старые счеты». Обсуждение условий поединка затягивается. Тарталья начинает понимать, что Кардано останется в стороне. Тогда он начинает подчеркивать несамостоятельность Феррари, именуя его «созданием (креатурой) Кардано», как тот сам назвал себя в первом картеле. Все вопросы адресованы им обоим: «Вы, мессер Джероламо, и Вы, мессер Луиджи...». В переписке содержится много интересного. Например, во втором картеле воспроизводится якобы услышанный Феррари разговор Кардано и Тартальи: «...так что Вам нужно еще? — Я не хочу, чтобы мое открытие было распространено.— А почему? — Для того чтобы никто не мог им воспользоваться.— В самом деле почему, если мы рождены не только для нас самих, но и для нашей родины и всего человечества, почему ты не хочешь, если уж тебе удалось сделать нечто ценное, чтобы этим могли воспользоваться и другие?».

Полтора года продолжалась переписка и вдруг Тарталья решительно согласился на поединок в Милане. В чем дело? Тем временем он получил лестное приглашение в родную Брешию (март 1548 г.), где он должен был читать публичные лекции (чего раньше ему не доводилось) и вести частные занятия, «в которых будут принимать участие лишь некоторые доктора и люди с определенным весом». Дела шли не слишком успешно и есть мнение, что

Тарталью заставили принять вызов его покровители в надежде, что победа упрочит его положение. Диспут состоялся 10 августа 1548 г. в Милане в присутствии многих знатных особ, в том числе губернатора Милана, но в отсутствие Кардано. О диспуте сохранились лишь короткие записи Тартальи, по которым почти невозможно восстановить истинную картину. Похоже, что Тарталья потерпел сокрушительное поражение. Но не следует заблуждаться — диспут не имел никакого отношения к проблеме, из-за которой возник спор, да и вообще диспуты имели столь же малое отношение к выяснению истины, как дуэли. Трудно было косноязычному Тарталье противостоять перед публикой блестящему молодому Феррари.

ДАЛЬНЕЙШАЯ СУДЬБА ГЕРОЕВ. Тарталья не удержался в Брешии; через полтора года он вернулся в Венецию, не получив даже гонорара за лекции. Поражение в диспуте очень повредило ему. В конце жизни (он умер в 1557 г.) начал выходить «Общий трактат о числе и мере», издание которого закончилось уже после смерти Тартальи. В трактате очень мало говорится о кубических уравнениях, а никаких следов большого трактата по новой алгебре, о котором Тарталья говорил всю жизнь, не было обнаружено в его тщательно сохраненном наследстве.

Напротив, Феррари получил после поединка большую известность. Он читает публичные лекции в Риме, руководит налоговым управлением в Милане, получает приглашение на службу к кардиналу Мантуи, участвует в воспитании сына короля. А вот следов в науке он больше не оставил! Умер Феррари в 43 года (1565 г.); по легенде его отравила сестра. Говоря о его смерти, Кардано вспоминает стихи римского поэта Марциала:

Необычайным дан век короткий и изредка старость.
То, что ты любишь, желай, чтобы не нравилось так *).

Дольше их обоих прожил Кардано. Но конец его жизни был нелегким. Один его сын (врач Джамбаттиста, на которого Кардано возлагал большие надежды) отравил из ревности жену и был казнен в 1560 г. От этого удара Кардано долго не мог оправиться. Другой его сын — Альдо — стал бродягой и ограбил собственного отца. В 1570 г. сам Кардано был посажен в тюрьму, а его имущество было конфисковано. Причина его ареста не известна — возможно, инициатива принадлежала инквизи-

*) Перевод А. А. Фета.

ции. В ожидании ареста Кардано уничтожил 120 своих книг. Кончил свои дни Кардано в Риме, на положении «частного человека» (его выражение), получающего скромную пенсию от папы. Последний год своей жизни Кардано посвятил составлению автобиографической книги «О моей жизни». Последний упоминаемый в ней факт датируется 28 апреля 1576 г., а 21 сентября Кардано умер.

В своей автобиографии Кардано четыре раза вспоминает Тарталью. В одном месте он одобрительно приводит его мысль, что «никто не знает всего, а тем более не знает ничего тот, кто сам не подозревает, что многого не знает». В другом месте говорится, что Тарталья предпочел иметь в нем «соперника и победителя, а не друга и человека, обязанного благодеяниями». Еще Тарталья оказывается в списке критиков Кардано, которые «не вышли за пределы грамматики». И, наконец, на самых последних страницах мы читаем: «Сознаюсь, что в математике кое-что, но в самом деле ничтожное количество, я заимствовал у брата Никколо». Похоже,. что неспокойно было у Кардано на душе!

ЭПИЛОГ. О проблеме Кардано—Тарталья надолго забыли. Формулу для решения кубического уравнения связывали с «Великим искусством» и постепенно стали называть формулой Кардано, хотя какое-то время фигурировало имя дель Ферро, авторство которого подчеркивал сам Кардано. Такого рода несправедливость в присвоении имени — вещь нередкая (можно вспомнить, например, аксиому Архимеда, на открытие которой он не претендовал).

К проблеме об авторстве формулы для кубического уравнения вернулись в начале XIX века. Обнаружилось существование обиженного Тартальи, который к тому времени был практически забыт. Почти забытая история получила огласку, и за честь Тартальи были готовы сражаться не только профессионалы, но и любители. Уж очень привлекательным был детективный компонент истории. Сколько лет должно было действовать обещание Кардано? Является ли шесть лет достаточным сроком давности? Почему Тарталья десять лет не публиковал своей формулы? Впрочем, при многократных передачах и проникновении в популярную литературу история сильно упростилась, и Кардано порой превращался в авантюриста и злодея, укравшего у Тартальи его открытие и давшего этому открытию свое имя. Как мы видели, дело обстояло сложнее

и такая интерпретация, по крайней мере, огрубляет картину.

Дело было не только в желании восстановить истинную картину событий в ситуации, когда их участники несомненно не говорили всей правды. Для многих было важно установить степень вины Кардано. Этот вопрос наталкивается на вечно злободневный вопрос о праве собственности на научное открытие. Что касается сегодняшней практики, то бросается в глаза разница между правами ученого и изобретателя. Ученый не может контролировать дальнейшее использование опубликованных результатов, он может претендовать лишь на упоминание его имени. Это одна из причин засекречивания открытий. На рубеже Средних веков и Возрождения поводом к засекречиванию математических результатов было их использование в поединках.

К концу XIX века часть дискуссии стала носить характер серьезных историко-математических исследований. Некоторые оригинальные материалы были впервые опубликованы («Картели» и «Вопросы»). Математики поняли, какую большую роль в науке XVI века сыграли работы Кардано. Стало ясно то, что еще раньше отмечал Лейбниц: «Кардано был великим человеком при всех его недостатках; без них он был бы совершенством».

Крупнейший историк математики Мориц Кантор (1829—1920; не путать с создателем теории множеств Георгом Кантором), автор многотомной истории математики, очень высоко ценил Кардано, не без сожаления констатируя, что его человеческие качества оставляли желать лучшего («гений, но не характер»). Кантор высказал предположение, имевшееся уже у Феррари, что Тарталья не переоткрыл правило дель Ферро, а узнал его в готовом виде из вторых рук. Он отмечал, что у Тартальи не было сколько-нибудь значительных математических работ, а по поводу кубических уравнений в публикациях и оставшихся рукописях, кроме самого правила и фактов, которые могли быть заимствованы из ранее вышедшего «Великого искусства», имеются лишь элементарные замечания. Разумеется, это не доказательство, к тому же у Тартальи были безусловные заслуги за пределами математики. Кантору казалось также подозрительным, что решения Тартальи и дель Ферро похожи друг на друга, как две капли воды. Кантору возражал Энестрем, который даже провел что-то вроде следственного эксперимента,

показывавшего, что такое совпадение возможно. Многое сделал для выяснения неясных мест Бортолетти: он привел рассуждения, которые могли бы подкрепить ряд высказываний Тартальи, казавшихся безответственными.

Полтора века то утихают, то вновь разгораются страсти. Не угасает желание получить однозначный ответ на вопрос, у которого такого ответа, может быть, просто не существует. А за формулой для решения кубического уравнения прочно укоренилось название «формула Кардано».

Добавление

ПО СТРАНИЦАМ КНИГИ ДЖЕРОЛАМО КАРДАНО «О МОЕЙ ЖИЗНИ»

За четыре месяца до смерти Кардано закончил свою автобиографию, которую он напряженно писал весь последний год и которая должна была подвести итог его сложной жизни. Он чувствовал приближение смерти. По некоторым сведениям его собственный гороскоп связывал его кончину с 75-летием. Он умер 21 сентября 1576 г. за два дня до годовщины. Имеется версия, что он покончил с собой в ожидании неминуемой смерти или даже чтобы подтвердить гороскоп. В любом случае Кардано-астролог относился к гороскопу серьезно. В своей книге он описывает ожидание смерти в 44 года, как предвещал предыдущий гороскоп.

Кардано волнует, удалась ли его жизнь. С одной стороны, он живет на скромную папскую пенсию в Риме, в вынужденном удалении от городов, где прошла лучшая часть его жизни, недавно побывал в тюрьме, несчастлив в детях. С другой стороны, Кардано уверен в своей значительности. Он критически оценивает многое из своего прошлого, хотя нетрудно обнаружить места, где ему удается убедить себя в своей правоте. Ведущая идея Кардано — предопределенность его жизни. Отсюда подробный анализ влияния звезд, взаимоотношений с «гением-хранителем», скрупулезный учет примет и предзнаменований, мелких событий, позволяющих построить логически стройную картину жизни. В некотором смысле цель Кардано — пользуясь искусством ученого и астролога, подробно проанализировать самого себя как объект воздействия высших сил. В науке устанавливался новый стиль, когда

выводы делались, исходя из предъявляемых фактов. Поэтому Кардано снабжает читателя подробными сведениями о своих физических особенностях, режиме питания, привычках и т. д., чтобы автор и читатель имели равные возможности для выводов. Книга Кардано — замечательный литературный памятник XVI века, она позволяет узнать очень много о том, как воспринимал жизнь один из умнейших людей своего времени.

Книга Кардано была переведена на русский язык в 1938 г. и издана в Гослитиздате.

Посмотрим, что рассказывает Кардано о себе. Кое-что уже приводилось в основном тексте.

«Имея в виду, что из всего того, что может быть достигнуто человеческим умом, нет ничего отраднее и достойнее познания истины и что ни одно из созданий смертных людей не может быть завершено, не подвергнувшись хотя бы в малой степени клевете,— мы, по примеру мудрейшего и, без сомнения, совершеннейшего мужа Антонина Философа решили написать книгу о собственной жизни. Мы заверяем, что ничего не внесли в нее ради хвастовства или из желания что-нибудь приукрасить...» — так начинается эта книга. Кардано подробно говорит о своей родине (Милане), своих предках. Сообщает о своем рождении: «...я родился 24 сентября 1500 г. (по-видимому, здесь описка: Кардано родился в 1501 г.— *С. Г.*) на исходе первого часа ночи, когда прошло уже более его половины, но шла еще последняя его треть..., я родился с курчавыми волосами и без признаков жизни; меня привели в чувства лишь ванной из теплого вина, что для другого могло оказаться гибельным...». Подробно описывается положение Марса, Меркурия и Луны, которое предвещало, что он «непременно должен был родиться уродом..., чего едва не произошло». Положение «зловещих планет» — Венеры и Меркурия — предвещали, что ему «будут присущи некоторая хитрость и отсутствие свободы духа, а вместе с тем склонность к опрометчивым и необдуманным решениям».

В отдельной главе описываются родители: «Мой отец, вопреки обычаям нашего города, одевался в красную суконную одежду, хотя сохранил черный цвет для своего исподнего платья. Он был косноязычен; лицо у него было румяное, а глаза белесоватые...; с пятидесятилетнего возраста лишился всех своих зубов *). Особенное предпо-

*) В другом месте сказано, что после попытки отравления.

чтение отдавал он сочинениям Евклида; ходил, согнув спину». Удивительные подробности! «Мать моя была вспыльчива, обладала очень хорошей памятью и даровитостью, была невысокого роста, скорее тучная, и отличалась благочестием».

Далее дается краткое описание жизни Кардано, после чего наступает черед его наружности. Вот несколько деталей: «Я среднего роста, с короткими и широкими у основания ступнями ног и с настолько высоким подъемом, что я никогда не мог найти для себя обуви... Грудь у меня несколько впалая, руки довольно тонкие, правая рука потолще... Шея довольно длинная и худая; подбородок раздвоен, нижняя губа толстая и отвислая. Глаза мои очень невелики и как бы прищурены, исключая тех случаев, когда я что-нибудь пристально рассматриваю... Волосы на голове и бороде были прежде белокурые... Старость изменила бороду, а волосы на голове мало» и т. д. Кардано описывает болезни, которыми он страдал и сообщает: «Теперь у меня осталось здоровых четырнадцать зубов и один больной, но я думаю, что и он долго еще сохранится благодаря лечению». Всего у него десять недугов, десятый — бессонница, от которой он лечится воздержанием от пищи.

Кардано сообщает, что он от природы труслив, но приобрел мужество, благодаря телесным упражнениям, что он остается в кровати десять часов, а спит — восемь, что он предпочитает рыбу мясу, перечисляет 21 сорт рыбы, которые он употребляет в пищу, причем у крупной рыбы он ест «голову и брюхо, а у мелкой — спину и хвост».

«Желание увековечить свое имя возникло во мне столь же рано, сколь поздно я оказался в состоянии выполнить свое намерение... ожидая чего-то от будущего, мы презираем настоящее...», — читаем мы. Случайности, козни противников да собственные астрологические изыскания, утверждавшие, что он не доживет до 45 лет, мешали стремлению Кардано увековечить свое имя. Все изменилось, когда оказалось, что предсказания не сбываются. Кардано решительно меняет образ жизни. Он читает лекции рано утром. «После того я шел гулять в тени за городской стеной, обедал и затем занимался музыкой; после этого я шел удить рыбу...; потом я занимался научной работой и писал, проводя свои вечера дома». Кардано объясняет, почему он предпочел медицину профессии юриста, как того хотел отец: «медицина одинакова и пригодна для

всего земного шара и для всех веков; она опирается на доказательства более ясные и менее зависящие от мнения отдельных людей...». Он рассказывает об успехах в преподавании и диспутах: «...в Болонье я освоился с импровизационной речью, так как почти всегда читал лекции без подготовки... И хотя это порождало очень высокое мнение обо мне, однако в моей речи отсутствовало изящество и не было истинного красноречия в изложении мыслей...»

Своеобразен перечень добродетелей: «Как бы меня иной раз ни соблазняла благосклонность судьбы и многочисленные мои успехи, я тем не менее, никогда не изменял своего поведения... Точно так же я не изменял своего платья на более богатое... Более чем в чем-нибудь ином я был постоянен в занятиях, в особенности, в писании книг... Я никогда не порывал уз дружбы, и если их приходилось порывать, то никогда не выдавал тайн своих бывших друзей». Подробно описываются друзья и покровители, но демонстративно не перечисляются враги и соперники. Впрочем, они неоднократно появляются на страницах книги, в том числе уже в следующей главе «Клеветы, сплетни и козни».

Кардано начинает с козней и испытывает некоторые затруднения при выборе примеров: он хотел бы говорить о больших и скрытых кознях, но козни, которые уже обнаружились, нельзя считать скрытыми, а большие козни трудно скрыть. Пофилософствовав, он выбирает случай при получении профессорского места в Болонье, когда распустили слухи, что он «читает перед пустыми скамьями, что он человек дурных нравов и для всех неприятен; отличается тупоумием и весьма развратен; также мало сведущ в искусстве врачевания и не имеет никакой практики». Всему бы поверили, если бы папский легат в Болонье не вспомнил, что Кардано вылечил его мать. Это подорвало доверие к остальной информации. Впрочем козни продолжались и в Болонье, и Кардано в конечном счете от должности отказался, хотя и успокаивал себя: «...все это закончилось в угоду тем, кто этого так добивался, но совсем не в их пользу». Что касается «клевет и лживых поношений», то Кардано не останавливается на конкретных случаях, считая, что «они больше мучили совесть их распространителей», а ему доставили больший досуг для написания книг, «способствовали приобрётению многих тайных знаний» и он не питает «ненависти к своим обвинителям».

Коротко перечисляются увлечения: перочинные ножи (на них истрачено больше двадцати золотых дукатов), различного рода перья (более двухсот дукатов), драгоценные камни, посуда, шарики из расписного стекла, редкие книги, плавание, рыбная ловля, философия Аристотеля и Плотина, мистика, стихи Петрарки и т. д. Одиночество он предпочитал компании, не только из-за преданности науке, а из нежелания терять время. О пристрастии к игре в шахматы и кости уже говорилось.

Отдельная глава посвящена одежде. Кардано находит у Горация описание, очень его напоминающее. Достаточно длинные рассуждения со ссылками кончаются констатацией, что надо иметь «по четыре пары платья: пару теплого, пару самого теплого, пару легкого и пару самого легкого. Таким образом, получится четырнадцать различных сочетаний...» Описывается походка, указывается, что причиной ее неровности являются постоянные размышления. Обсуждаются взаимоотношения с религией и философией, подчеркивается влияние Платона, Аристотеля, Плотина и особенно Авиценны. Перечисляются «особые правила», усвоенные в течение жизни: благодарить бога и просить его о помощи, не ограничиваться возмещением потерь и убытков, беречь время, почтительно относиться к старикам, «по возможности предпочитать верное неверному», «не упорствовать в проведении того, что идет дурно», и т. д. Кардано перечисляет дома, в которых он жил, красочно описывает свою бедность и потерю отцовского наследства.

Кардано подробно пишет о жене и детях. Он пишет, что видел будущую жену во сне до того, как с нею познакомился, и сон предвещал несчастный брак. Уже говорилось о судьбе его детей. Описываются путешествия, в основном, в связи с врачебной деятельностью, объясняется польза путешествий.

Самая большая глава посвящена опасностям и случайностям. Кардано подробно описывает их, видимо внушая читателю, что за этим могут стоять более глубинные явления. («Эти события не должны были бы возбуждать удивления, если бы у нас не было налицо частых примеров».) Почти в одном и том же месте он чудом трижды избежал опасности: от упавшего со стены камня, от огромного куска штукатурки и от перевернувшейся повозки, дважды он чуть не утонул при очень романтических обстоятельствах. Кардано подвергался нападению беше-

ных собак, проваливался в яму, падал с повозки на полном ходу, подвергался опасности заражения чумой. Эти истории читаются как детективные рассказы. После этого доходит очередь до страшных козней, которые придумывали конкуренты — врачи в Павии: тут и клевета, в которую вовлекли мужа дочери, и бревно, которое могло упасть при входе в Академию, и попытка отравить, предварительно удалив мальчиков, которые пробовали пищу. Однако все неожиданно кончалось болезнью или даже смертью врагов. В Риме Кардано преследуют опасности из-за незнания улиц и «варварских обычаев римских жителей». Но, наконец, он решает, что его охраняет провидение и перестает бояться опасностей. И вот итог: «...кто не увидит в этом предвестия или некоторого рода обеспечения моей будущей славы?».

Кардано включает в книгу этюд о счастье с примерами из жизни. Он перечисляет оказанные ему почести, в основном лестные приглашения. С другой стороны, перечисляются неприятные эпизоды в его врачебной практике, обсуждается их связь со снами. Неожиданно речь заходит о родовом гербе Кардано, в который он в день ареста решил добавить ласточку: «...ибо считал ее во многих отношениях олицетворяющей мой собственный нрав и привычки». Спорное сравнение! Кардано перечисляет своих учителей и учеников.

И опять Кардано повествует об удивительных своих свойствах и происшествиях: в детстве его посещали видения из воздушных колечек, у него не могли согреться ноги ниже колен; в его присутствии не проливалась кровь (он стал даже нарочно вмешиваться в драки и ни разу не был ранен); события, предвещавшие гибель старшего сына; и, наконец, многочисленные сновидения, которые предшествовали истинным событиям. Очень красочны описания снов, содержащие многочисленные подробности.

Далее перечисляются десять наук, которые постиг Кардано, и описываются сорок избранных случаев из его медицинской практики. А затем идет глава: «Явления, по-видимому, естественные, но поразительные». И вот первое из этих явлений: «... я родился в век, когда был открыт весь земной шар, тогда как в древности было известно лишь немного более одной трети». Кроме того, обрушился его дом, но уцелела спальня, дважды загоралась его постель и т. д. Подробно анализируется дар пред-

сказания, постоянно проявлявшийся в его жизни: от медицины до карточной игры.

В заключительной части книги опять идет речь о сверхъестественных случаях, обсуждаются научные достижения, перечисляются его книги. Кардано вновь говорит о себе самом, о своем духе-хранителе, перечисляет отзывы о себе, рассуждает «о делах мира сего», несколько страниц занимают изречения, которыми следует руководствоваться. Вот примеры: «Друзья в несчастии подают помощь, льстецы — совет», «Знаменитому человеку следует жить там, где имеет пребывание его государь», «Когда ты хочешь мыться, сначала приготовь полотенце, чтобы вытереться», «Зло должно лечить добром, а не злом». За изречениями следует «Плач об умершем сыне». В конце речь снова идет о недостатках автора, о переменах, связанных с возрастом, и об «особенностях обхождения».

ДВА РАССКАЗА О ГАЛИЛЕЕ

I. ОТКРЫТИЕ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ

Первые основы динамики были заложены Галилеем. Действие сил до него рассматривали исключительно в случае их равновесия; и хотя ускоренное движение свободно падающих тел и криволинейное движение брошенных тел также приписывали постоянно действующей силе тяжести, но никому не удалось установить законов указанного обыденного явления, зависящего от столь простой причины. Галилей первый сделал этот шаг и открыл новую и безграничную область для развития механики. Это открытие... составляет теперь наиболее значительную и непререкаемую часть заслуг этого великого человека. В самом деле, чтобы открыть спутники Юпитера, фазы Венеры, солнечные пятна и т. д., требуется не только телескоп и наблюдательность, но нужен исключительный гений, чтобы установить законы природы на явлениях, которые всегда были у всех перед глазами и тем не менее ускользали от внимания философов.

Лагранж

ПРОЛОГ. Винченцо Галилей, известный во Флоренции музыкант, долго размышлял над тем, какое поприще выбрать для своего старшего сына Галилео. Сын, безусловно, был способен к музыке, но отец предпочитал что-нибудь более надежное. В 1581 г., когда Галилео исполнилось семнадцать лет, чаша весов склонилась в сторону медицины. Винченцо понимал, что расходы по обучению будут велики, зато будущее сына будет обеспечено. Местом обучения был выбран Пизанский университет, быть может, несколько провинциальный, но хорошо знакомый Винченцо. Он долго жил в Пизе, там же родился Галилео.

Путь к профессии врача был нелегок. Перед тем как приступить к изучению медицины, надо было выучить, а точнее — вызубрить, философию Аристотеля. В его учении говорится буквально обо всем. По мнению Галилея, «нет, кажется, ни одного достойного внимания явления, мимо которого он (Аристотель) прошел бы, не коснувшись его». Философия Аристотеля в то время преподавалась в чудовищной форме: в виде набора высказываний, считавшихся истинами в последней инстанции, лишенных мотивировок и доказательств. О несогласии с Аристотелем не могло быть и речи.

Более всего интересует Галилея то, что пишет Аристотель о физике окружающего мира, но он не хочет слепо верить каждому слову великого философа; он усвоил это,

изучая его логику: «Сам Аристотель научил меня удовлетворять свой разум только тем, в чем убеждают меня рассуждения, а не только авторитет учителя». Он читает и других авторов, среди которых наибольшее впечатление на него производят Архимед и Евклид.

ТАЙНЫ ДВИЖЕНИЯ. Из всего, что происходит в окружающем мире, наибольший интерес Галилея вызывали разнообразные движения. Он по крупицам собирает все, что написано о движении у древних, но с сожалением констатирует: «В природе нет ничего древнее движения, но именно относительно него написано весьма мало значительного». А вопросы возникают у пытливого юноши на каждом шагу...



Галилео Галилей
(гравюра XVII века). 1564—1642.

«В 1583 г., имея около двадцати лет от роду, Галилей находился в Пизе, где, следуя совету отца, изучал философию и медицину. Однажды, находясь в соборе этого города, он, со свойственной ему любознательностью и смекалкой, решил наблюдать за движением люстры, подвешенной к самому верху,— не окажется ли продолжительность ее размахов, как вдоль больших дуг, так и вдоль средних и малых, одинаковой; ибо ему казалось, что продолжительность прохождения большой дуги может сократиться за счет большей скорости, с которой, как он видел, движется люстра на более высоких и наклонных участках. И пока люстра размеренно двигалась, он сделал грубую прикидку — его обычное выражение — того, как происходит движение взад и вперед, с помощью биения собственного пульса, а также темпа музыки, в которой он тогда уже был искушен с немалою от того для себя пользой. И ему на основании таких подсчетов показалось, что он не заблуждается, подсчитав, что времена одинаковы, но не удовлетворенный этим, вернувшись домой, он, чтобы

надежнее в этом удостовериться, решил сделать следующее. Он привязал два свинцовых шара на нитях совершенно одинаковой длины так, чтобы они могли свободно раскачиваться... и, отклоняя их от вертикали на разное число градусов, например один шар на 30, другой на 10, он отпускал их в одно и то же мгновение. С помощью товарища он наблюдал, что, пока один маятник делал такое-то число колебаний по большим дугам, другой делал в точности столько же по малым.

Сверх того он сделал два сходных маятника, только достаточно разной длины. Он наблюдал, что, пока малый маятник делал какое-то число колебаний, например 300, по большим дугам, большой за то же время делал всегда одно и то же число колебаний, скажем 40, как по своим большим дугам, так и по совсем маленьким, и повторив это несколько раз..., он заключил отсюда, что вполне одинакова продолжительность размахов одного и того же маятника, будут ли они весьма велики или весьма малы, и что почти нет при этом заметных различий, каковые надо приписать помехе со стороны воздуха, который больше противится быстрее движущемуся тяжелому телу, чем медленнее движущемуся.

Он видел также, что ни различие в абсолютном весе, ни разный удельный вес шаров не вызывали заметного изменения — все шары, лишь бы они были на нитях равной длины от их центров до точек подвеса, сохраняли достаточно постоянно равенство (времени) прохождения по всяким дугам; лишь бы не был взят легчайший материал, движению которого в воздухе легче препятствовать, так что оно быстрее сводится к покою».

Приведенный рассказ принадлежит Винченцо Вивиани (1622—1703), который в 1639 г. в семнадцатилетнем возрасте прибыл на виллу Арчетри близ Флоренции, где находился Галилей после приговора инквизиции. Через два года там появился Эванджелиста Торричелли (1608—1647). Оба они помогали ослепшему ученому завершать его замыслы; ряд результатов они получили под влиянием Галилея (знаменитые барометрические опыты, исследование циклоиды). По-видимому, Вивиани был особенно близок Галилею, который охотно беседовал с ним на разные темы, часто вспоминая о далеком прошлом. Потом Вивиани по разным поводам пересказывал услышанное им в те дни. Эти рассказы не считаются достаточно достоверными, причем не всегда ясно, кто явился источником не-

точностей: рассказчик или слушатель. Увековечение памяти учителя — было главной целью жизни Вивиани.

Вернемся к рассказу Вивиани. В нем речь идет об открытии изохронного свойства маятника: при фиксированной длине период колебаний маятника не зависит от их амплитуды. Поучительно, как Галилей следил за временем: при помощи музыки и пульса (кажется, на этот способ первым указал Кардано). Нам, людям XX века, привыкшим к ручным часам, не следует забывать об этих трудностях. Достаточно точные часы были сконструированы как раз на основе открытого Галилеем свойства маятника (мы еще будем иметь возможность говорить о маятниковых часах). Кстати, в своих лабораторных экспериментах, о которых пойдет речь ниже, Галилей пользовался для измерения времени медленно вытекающей струей воды (вариантом водяных часов).

Галилей обнаруживает связь между длиной маятника и частотой его колебаний: квадраты периодов колебаний относятся как их длины. Вивиани пишет, что Галилей получил этот результат, «руководствуясь геометрией и своей новой наукой о движении», но никто не знает, каким мог быть такой теоретический вывод. Быть может, все Галилей подметил закономерность экспериментально. Галилей, по-видимому, не знал, что колебания маятника изохронны лишь для малых углов отклонения. При больших углах период начинает зависеть от угла отклонения, и для 60° , например, период заметно отличается от периода для малых углов. Галилей мог бы заметить это в серии опытов, описанных Вивиани. Неточность утверждения Галилея об изохронности математического маятника обнаружил Гюйгенс.

Занятия медициной шли не очень успешно, хотя Галилео стремился оправдать надежды и затраты отца. Все же в 1585 г. он возвращается во Флоренцию, не получив диплома доктора. Во Флоренции Галилей продолжает заниматься математикой и физикой, вначале втайне от отца, а потом при его согласии. У Галилео появляются контакты с учеными, в том числе с маркизом Гвидо Убальдо дель Монте. Благодаря поддержке последнего тосканский герцог Фердинандо Медичи в 1589 г. назначил Галилея профессором математики Пизанского университета. В Пизе Галилей находился до переезда в 1592 г. в Падую. Восемнадцать лет, прожитых в Падуе, Галилей считал самым счастливым периодом в своей жизни. С 1610 г. и до

конца жизни он — «философ и первый математик светлейшего великого герцога тосканского». И в Пизе, и в Падуе изучение движений — главное дело Галилея.

СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ. Галилея интересует прежде всего свободное падение — одно из самых распространенных естественных движений. Как и полагалось в то время, начать нужно с того, что́ по этому поводу говорил Аристотель. «Тела, имеющие большую силу тяжести или легкости, если в остальном они имеют одинаковую фигуру, скорее проходят равное пространство в том пропорциональном отношении, в каком указанные величины относятся друг к другу». Значит, по Аристотелю скорости падающих тел пропорциональны их весу. Второе утверждение состоит в том, что скорости обратно пропорциональны «густоте среды». С этим утверждением возникли сложности, поскольку в пустоте, «густота» которой равна нулю, скорость должна была бы быть бесконечной. На это Аристотель заявил, что в природе пустоты не бывает («природа боится пустоты»).

Первое утверждение Аристотеля оспаривалось иногда уже в Средние века. Но особенно убедительной была критика Бенедетти, ученика Тартальи и современника Галилея, с трактатом которого Галилей познакомился в 1585 г. Вот как выглядит основное опровержение. Пусть имеются два тела — тяжелое и легкое: первое должно падать быстрее. Теперь соединим их. Естественно предположить, что легкое тело притормозит тяжелое и скорость падения должна стать промежуточной между скоростями падения составляющих тел. Но по Аристотелю скорость должна стать больше, чем скорость каждого тела! Бенедетти решает, что скорость падения зависит от удельного веса и даже прикидывает, что для свинца она в 11 раз больше, чем для дерева. В существование зависимости скорости от удельного веса долго верил и Галилей.

Он приступил к изучению свободного падения еще в Пизе. Вот что пишет Вивиани: «...Галилей целиком отдался размышлениям, и к великому смущению всех философов им была показана, посредством опытов, солидных доказательств и рассуждений, ложность множества заключений Аристотеля, касающихся движения, считавшихся до этого совершенно очевидными и несомненными. Сюда относится положение, что движущиеся тела, состоящие из одного и того же вещества, но имеющие разный вес, находясь в одной и той же среде, не обладают ско-

ростями, пропорциональными их весу, как полагал Аристотель, но все движутся с одинаковой скоростью. Это он доказывал неоднократными экспериментами, производившимися с высоты Пизанской башни, в присутствии других лекторов и философов и всей ученой братии». Галилея до сих пор часто рисуют кидающим шары с Пизанской башни. Эта легенда обросла многими пикантными подробностями (например, о кабатчике, распускавшем слухи, что профессор Галилей будет прыгать с башни). Заметьте, что пока речь идет только о телах из одного и того же вещества.

Галилея занимает наблюдение Бенедетти, что скорость свободного падения увеличивается по мере движения тела. И Галилей решает найти математически точное описание этого изменения скорости. Здесь следует сказать, что первоначально Галилей видел свою задачу в том, чтобы математизировать физику Аристотеля: «Философия написана в величайшей книге, которая постоянно открыта нашим глазам (я говорю о Вселенной); но нельзя ее понять, не научившись сперва понимать язык и различать знаки, которыми она написана. Написана же она языком математическим, и знаки ее суть треугольники, круги и другие математические фигуры». Однако скоро стало ясно, что математизация требует систематического пересмотра всех фактов.

Как же найти закон изменения скорости свободного падения? Эксперимент только начинал входить в практику научного исследования. Для Аристотеля и его последователей он считался лишним и недостойным занятием как при установлении истины, так и при ее проверке. Галилей мог бы попытаться проделать серию экспериментов со свободно падающими телами, провести тщательные измерения и искать закономерность, которая их объясняет. Так современник Галилея Кеплер, обрабатывая многочисленные наблюдения Тихо Браге, обнаружил, что планеты движутся по эллипсам. Но Галилей выбирает другой путь. Он решает вначале угадать закон из общих соображений, а уже затем проверить его экспериментально. Раньше никто так не поступал, но постепенно такой план исследований станет одним из ведущих при установлении научных истин.

Теперь о том, как Галилей попытался угадать закон. Он решает, что природа «стремится применять во всех своих приспособлениях самые простые и легкие средства»,

а значит, и закон нарастания скорости должен происходить «в самой простой и ясной для всякого форме». Но раз скорость растет с ростом пройденного пути, то что может быть проще предположения о том, что скорость пропорциональна пути: $v = cs$, c — постоянное число. Это предположение испугало его поначалу: ведь получается, что падение начинается с нулевой скоростью, а кажется, что скорость с самого начала велика. Но вот какое рассуждение убедило его, что противоречия нет: «Если груз, падающий на сваю с высоты четырех локтей, вгоняет последнюю в землю приблизительно на четыре дюйма,— при падении с высоты двух локтей он вгоняет ее в землю меньше и, конечно, еще меньше при падении с высоты одного локтя или одной пяди, и когда, наконец, груз падает с высоты не более толщины пальца, то производит ли он на сваю больше действия, чем если бы он был положен без всякого удара? Еще меньшим и совершенно незаметным будет действие груза, поднятого на толщину листа. Так как действие удара находится в зависимости от скорости ударяющего тела, то кто может сомневаться в том, что движение чрезвычайно медленно и скорость минимальна, если действие удара совершенно незаметно?»

Галилей долго исследовал различные следствия из сделанного предположения и неожиданно обнаружил, что... *по такому закону движение вообще происходить не может*! Давайте и мы попытаемся понять, в чем дело. Коэффициент пропорциональности зависит от выбора единицы времени. Будем считать для простоты, что $c = 1$, путь измеряется в метрах, а время в секундах. Тогда во все моменты времени $v = s$.

Рассмотрим точку A, находящуюся на расстоянии 1 м от начала O. Прикинем, через какое время от начала движения тело окажется в этой точке. В точке A скорость равна 1 м/с. Возьмем точку A_1, лежащую посередине между началом O и A. На отрезке A_1A мгновенная скорость будет меньше 1 м/с, и на отрезок длиной $^1/_2$ м потребуется больше $^1/_2$ с. Возьмем теперь точку A_2 — посередине между O и A_1. На отрезке A_2A_1 мгновенная скорость будет меньше $^1/_2$ м/с (все точки находятся от O на расстоянии, меньшем $^1/_2$ м), и на отрезок A_2A_1 длиной $^1/_4$ м уйдет опять более $^1/_2$ с. Вы уже, конечно, догадались, как мы будем рассуждать дальше: точка A_3 — середина отрезка OA_2, на отрезок A_3A_2 длиной $^1/_8$ м при скорости, меньшей $^1/_4$ м/с, опять-таки уйдет более $^1/_2$ с и т. д. Процесс деле-

ния можно продолжать неограниченно, и мы можем набрать любое число отрезков, на прохождение которых уходит больше $^1/_2$ с, так и не добравшись до O. Значит, тело из O попасть в A вообще не может!

Мы предположили, что A находится на расстоянии 1 м от O. Но аналогично показывается, что вообще ни в какую точку тело из O попасть не может. Вот с какого замечательного рассуждения началась классическая механика!

Впрочем сам Галилей публикует по этому поводу неубедительное рассуждение. Он пытается прийти к противоречию, считая, что раз скорость пропорциональна пути, то любые отрезки от начала должны проходиться за одно и то же время, что неверно. То ли Галилей еще не привык работать с мгновенной скоростью, то ли первоначально у него было другое рассуждение, которое он уже не смог восстановить, когда после долгого перерыва записывал эти результаты в преклонном возрасте (мы увидим почему это получилось). От него осталось немало утверждений, либо лишенных мотивировок, либо снабженных сомнительными рассуждениями.

Ну что же, у Галилея были все основания обидеться на коварство природы, которая не выбрала самого простого пути. Однако вера в разумность природы у Галилея не угасла. Он рассматривает не менее простое предположение, что нарастание скорости происходит пропорционально времени: $v = at$. Такое движение он назвал естественно ускоренным, но прижился термин «равномерно ускоренное движение». Галилей рассматривает график скорости на отрезке времени от 0 до t и замечает, что если взять моменты времени t_1, t_2 равноотстоящие от $t/2$, то насколько в t_1 скорость меньше $at/2$, настолько в t_2 она больше. Отсюда он делает вывод, что в среднем скорость равна $at/2$, а пройденный путь равен $at/2 \cdot t = at^2/2$ (не слишком строгое рассуждение!). Значит, *если рассмотреть равноотстоящие отрезки времени* $t = 1, 2, 3, 4, \ldots$, *то отрезки пути, пройденные от начала, будут относиться как квадраты натуральных чисел* 1, 4, 9, 16, ..., *а отрезки, пройденные между соседними моментами отсчета,— как нечетные числа* 1, 3, 5, 7, ...

Еще раз проследим за логикой Галилея. Прежде всего он разделяет вопросы «как» и «почему». Для последователей Аристотеля ответ на первый вопрос должен быть непосредственным следствием ответа на второй. Галилей же, трезво оценив свои возможности, не разбирается в приро-

де возникновения ускоренного движения при свободном падении, а пытается лишь описать закон, по которому оно происходит. Принципиальное значение имеет поиск простого общего принципа, из которого этот закон можно вывести. Он ищет «принцип, совершенно несомненный, который можно принять за аксиому». Высказывания Галилея из письма Паоло Сарпи (осень 1604 г.) можно интерпретировать так, что он уже знал закон изменения пути при свободном падении, но не был удовлетворен тем, что не может вывести его из казавшегося несомненным принципа: «Тело, испытывающее естественное движение, увеличивает свою скорость в той же пропорции, что и расстояние до исходного пункта».

Здесь важно было выбрать основную независимую переменную, относительно изменений которой рассматриваются изменения всех величин, характеризующих движение. Очень естественно, что первоначально в качестве такой переменной выбирается пройденный путь: ведь наблюдатель видит, как нарастает скорость по мере увеличения пройденного расстояния. Сказывалось, что измерение времени еще не играло значительной роли в жизни людей, не было точных, доступных часов. Мы не всегда отдаем себе отчет, насколько постепенно ощущение постоянно текущего времени внедрялось в человеческую психологию. Галилей проявил большую гибкость, сравнительно быстро переориентировавшись с пути на время. В 1609—1610 гг. он открыл верный принцип равноускоренности свободного падения (относительно времени!).

Не следует переоценивать окончательный характер понятий скорости и ускорения у Галилея. Понятие мгновенной непрерывно меняющейся скорости нелегко ощутить, и оно медленно завоевывало права гражданства. Трудно было удостовериться, что отказ от скачкообразного изменения скорости не приводит к противоречиям, которыми были переполнены рассуждения о непрерывных процедурах. Нам сегодня трудно оценить смелость Галилея, так решительно оперирующего с переменной скоростью. Ему не поверили такие мастера аналитических рассуждений как Кавальери, Мерсенн, Декарт. Последний категорически не принимал движения с нулевой начальной скоростью, при котором тело «проходит через все стадии медленности». Еще более сложен процесс вычисления пути при переменной скорости, который требует интегрирования. Галилей владел им лишь в варианте, близком к тех-

нике Архимеда или к «неделимым» Кавальери. В рассматриваемом случае он применяет искусственный прием, делая не вполне обоснованный переход к средней скорости, а затем пользуется привычной формулой для равномерного движения. От открытия закона свободного падения отсчитывает свою историю не только новая механика, но и новый математический анализ. Что касается ускорения, то, поскольку Галилей ограничился только равноускоренным случаем, он не нуждался в общем понятии. Ускорение свободного падения как универсальная константа у Галилея еще не появляется.

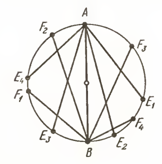
Что касается роли силы в возникновении неравномерного движения, то здесь высказывания Галилея лишены полной ясности. Он отвергает принцип Аристотеля, что скорость пропорциональна действующей силе, утверждая, что при отсутствии сил сохраняется равномерное прямолинейное движение. Закон инерции (первый закон Ньютона) носит имя Галилея. Галилей постоянно обращается к примеру со снарядом, который летел бы по прямой, если бы не испытывал земного притяжения. Он пишет, что «степень скорости, обнаруживаемая телом, нерушимо лежит в самой его природе, в то время как причины ускорения или замедления являются внешними», «...движение по горизонтали является вечным, ибо если оно является равномерным, то оно ничем не ослабевается, не замедляется и не уничтожается». Галилей в «Послании к Инголи» поэтически описывает разнообразные явления на борту равномерно прямолинейно движущегося корабля, которые не позволяют обнаружить это движение: капли воды попадают точно в горлышко подставленного сосуда, камень с мачты падает вертикально вниз, вверх поднимается дым, бабочки летают с одинаковой скоростью во всех направлениях и т. д. Создается ощущение, что Галилей уверенно придерживался принципа инерции в «земной» механике, но не был столь последователен в небесной (об этом речь впереди).

Ньютон приписывал Галилею не только первый закон механики, но и второй, хотя это и было преувеличением: четкой связи между силой и ускорением (когда они отличны от нуля) у Галилея не было. В том, что касается свободного падения, Галилей дал исчерпывающий ответ на вопрос «как», но не дал ответа на вопрос «почему».

ДВИЖЕНИЕ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ. Своим основным выводом Галилей считал утверждение, что

падающее тело проходит в последовательные равные промежутки времени отрезки, пропорциональные последовательным нечетным числам. Он хочет проверить это. Но как это сделать? Нельзя же продолжать кидать шары с Пизанской башни, да он и жил уже в Падуе. В лаборатории же падение происходит очень быстро. Но Галилей находит остроумный выход: он заменяет свободное падение более медленным движением тел по наклонной плоскости. Он заметил, что из предположения о равноускоренности свободного падения следует равноускоренность движения тяжелой точки по наклонной плоскости. По существу — это привычное сегодня рассуждение с разложением сил, показывающее, что тяжелая точка скатывается по наклонной плоскости с постоянным ускорением $g \sin \alpha$, где α — угол наклона к горизонтали (g — ускорение свободного падения). Рассуждения Галилея более громоздки: он не вводит ускорение свободного падения, а манипулирует, как это было принято тогда, с большим числом пропорций. Он выводит целый ряд следствий из равноускоренности движения точки по наклонной плоскости, которые уже удобны для лабораторной проверки (если угол наклона мал, то время скатывания велико). Центральное место занимает утверждение, что если наклонные плоскости имеют одинаковую высоту, то времена скатывания относятся как пройденные пути (почему?).

Движение по наклонной плоскости представляет для Галилея самостоятельный интерес. Он делает целый ряд наблюдений. Например, если точки двигаются по хордам окружности AE_i, BF_i, AB — вертикальный диаметр, то все времена скатывания равны времени свободного падения по AB (докажите!). Довольно сложное рассуждение приводит Галилей в доказательство того, что если A, B, C — последовательные точки на окружности, то точка по ломаной ABC скатывается быстрее, чем по хорде AC. С этим связана известная ошибка Галилея: он считал, что быстрее всего точка скатывается по четверти окружности, в то время как этим свойством обладает дуга циклоиды.



ДВИЖЕНИЕ БРОШЕННЫХ ТЕЛ. Такое движение Галилей называл принужденным (в отличие от свободного падения). Аристотель считал, что тело, брошенное под углом к горизонту, движется вначале по наклонной прямой, затем по дуге окружности и, наконец, по вертикальной прямой. Возможно Тарталья был первым, кто утверждал, что траектория брошенного тела «не имеет ни одной части, которая была бы совершенно прямой».

Теорию «принужденного» движения Галилей построил сразу же за теорией свободного падения. Путь, по которому он двигался, был прежним: теория (модель явления) предшествовала экспериментам. Догадка Галилея была гениально простой: движение тела, брошенного под углом к горизонту, складывается из равномерного прямолинейного движения, которое имело бы место не будь силы тяжести, и свободного падения. В результате тело движется по параболе. Отметим, что в этом рассуждении существенно используется закон инерции — закон Галилея.

В рассмотрении сложного движения у Галилея был гениальный предшественник, служивший для него образцом: «...я хочу трактовать и рассматривать это явление в подражание Архимеду в его «Спиральных линиях», где, заявив, что под движением по спирали он понимает движение, слагающееся из двух равномерных, одного — прямолинейного, а другого — кругового, он непосредственно переходит к демонстрации выводов». Речь идет о так называемой спирали Архимеда, которую описывает точка, движущаяся по радиусу вращающегося круга (муха к центру грамофонной пластинки).

Пользуясь свойствами параболы, Галилей составил «таблицу для стрельбы, имеющую важное практическое значение». Недаром Падуя принадлежала Венецианской республике, и Галилей поддерживал постоянные контакты с венецианским арсеналом. Ряд утверждений Галилея, полученных теоретическим путем, допускает экспериментальную проверку. Он доказал утверждение Тартальи о том, что угол в 45° отвечает наибольшей дальности полета, и показал, что для углов, дающих в сумме 90°, дальности полета одинаковы (при фиксированной величине скорости).

ГАЛИЛЕЙ И КЕПЛЕР. Открытия Галилея должны были поразить его современников. Конические сечения (эллипсы, параболы, гиперболы) — вершина греческой

геометрии — казались плодом математической фантазии, не имеющим отношения к действительности. И вот Галилей показал, что параболы неминуемо возникают в совершенно «земной» ситуации. (Еще в XIX веке Лаплас приводил применение конических сечений как самое неожиданное применение чистой математики.) Замечательно, что буквально в те же самые годы конические сечения возникли совсем в другой задаче и не менее удивительным образом. В 1604—1605 гг. Иоганн Кеплер (1571—1630) обнаружил, что Марс движется по эллипсу, у которого в фокусе находится Солнце (через десять лет Кеплер распространил это утверждение на все планеты). Это совпадение знаменательно, и для нас эти два открытия стоят рядом, но до Ньютона, вероятно, никто серьезно не сопоставлял эти результаты. Более того, Галилей не признавал закона Кеплера, а о своем открытии Кеплеру не сообщал, несмотря на регулярную переписку (оно было опубликовано уже после смерти Кеплера).

Галилей и Кеплер долгие годы переписывались. Кеплер был для Галилея одним из самых близких по духу ученых. Прежде всего было существенно, что Кеплер безоговорочно принимал систему Коперника. Еще в 1597 г. Галилей (в связи с получением книги «Тайна мироздания») делится с Кеплером сокровенным желанием опубликовать свои аргументы в пользу системы Коперника. Он пишет: «...я до сих пор не решился опубликовать их из боязни столкнуться с той же судьбой, которая постигла нашего Коперника, хотя и заслужившего бессмертную славу среди немногих, но представлявшегося большинству заслуживающим освистания и осмеяния, до того велико количество глупцов. Я бы все же решился выступить с моими размышлениями, если бы было больше таких людей, как Вы, поскольку же это не так, я избегаю касаться указанной темы». Кеплер посылает в ответ страстный призыв: «Оставь колебания, Галилей, и выступай вперед!» Он предлагает объединиться: «Если я не ошибаюсь, среди видных математиков Европы немного таких, кто захочет отделиться от нас». А книгу не обязательно печатать в Италии, можно и в Германии. В далекой Праге проблема виделась не так, как в Италии, где шестой год ждал в тюрьме своей участи Джордано Бруно.

Очень поучителен путь, которым шел Кеплер к своему открытию. У Кеплера как ученого было два лица. С одной стороны, это был великий фантазер, пытавшийся постичь

величайшие тайны мироздания. Он был уверен, что самая великая тайна, открывшаяся ему, состояла в следующем. Существует шесть планет, потому что существует пять правильных многогранников! «Мне никогда не удастся найти слов, чтобы выразить свое восхищение этим открытием». Кеплер располагает шесть сфер, перемежая их различными правильными многогранниками так, что в каждую сферу один многогранник вписан, а другой — описан. Сферам он ставит в соответствие последовательные планеты. В порядке многогранников особый таинственный смысл (куб отвечает Сатурну, тетраэдр — Юпитеру — и т. д.). Отношения радиусов сфер Кеплер сравнивает с известными относительными размерами орбит и странным образом получает не очень большое расхождение (кроме как для Меркурия). Эти рассуждения, опубликованные в книге «Тайна мироздания», были многими благожелательно встречены, не вызывали возражений у Галилея, а «король астрономов» Тихо Браге пригласил Кеплера сотрудничать с ним.

С этим приглашением связана другая сторона научной жизни Кеплера, так не похожая на первую. Он скрупулезно обрабатывает многочисленные наблюдения Тихо Браге, которые обладали невиданной точностью для наблюдений, не использующих телескопов (их точность оценивают в $\pm 25''$). Он должен пересмотреть орбиты планет, пользуясь наблюдениями Тихо Браге. По-видимому, Тихо Браге (Кеплер называл его «Фениксом астрономии») рассчитывал получить подтверждение своей компромиссной теории, по которой Солнце движется вокруг Земли, а остальные планеты — вокруг Солнца. Но Кеплер проводил вычисления в рамках системы Коперника.

Поскольку Коперник, подобно Птолемею, собирал орбиты планет из кругов, в его системе сохранились эпициклы. Кеплер хочет упростить систему (его итоговый труд, вышедший в 1618—1621 гг., назывался «Сокращение коперниковой астрономии»). Удивительным образом орбита Земли почти не отличается от окружности, однако Солнце несколько смещено относительно центра. Все это знал Коперник, но Кеплер уточнил величину смещения. Он внимательно изучил неравномерный характер движения Земли по орбите и долго искал закономерность в этом движении. Он пробовал обратно пропорциональную зависимость от расстояния до Солнца, ряд других возможностей, пока не обнаружил закон площадей (2-й закон

Кеплера). Затем Кеплер вычисляет орбиту Марса и сравнивает ее с разными кривыми. Он проявляет поразительную трезвость и доверие к результатам наблюдений. Один раз он отверг гипотезу, обнаружив расхождение в 8′ с данными Тихо Браге (такое расхождение почти незаметно для невооруженного глаза). «Он ясно сознавал, что теоретические, логико-математические построения, безразлично насколько прозрачные, не могут сами по себе гарантировать истину, что самые логические теории не имеют ни малейшего значения в естественных науках без сравнения с точнейшим опытом» (Эйнштейн). Кеплер перебрал разнообразные овалы и, наконец, обнаружил, что годится эллипс с Солнцем в фокусе. «Не переставая ощупывать все места окружающего мрака, я вышел, наконец, на яркий свет истины». Не правда ли, путь Кеплера мало напоминал путь Галилея. Галилей в большей степени шел от общих принципов и качественных результатов. На склоне лет Галилей вспоминал: «Я всегда ценил Кеплера за свободный (пожалуй, даже слишком) и острый ум, но мой метод мышления решительно отличен от его, и это имеет место в наших работах об общих предметах. Только в отношении движений небесных тел мы иногда сближались в некоторых схожих, хотя и немногих концепциях, отличающихся общностью оценки отдельных явлений, но это нельзя обнаружить и в одном проценте моих мыслей».

Галилей считал, что в мире царит равномерное круговое движение и не поверил ни в эллиптические орбиты, ни в неравномерное движение планет по орбитам, не приняв к сведению данных наблюдательной и вычислительной астрономии.

Кеплер был первым, кто рассматривал взаимное притяжение тел, связывал его с движением: он даже высказал гипотезу о характере убывания взаимодействия с расстоянием (как $1/r$, что неверно). Он принимал объяснение приливов лунным притяжением. Все это было совершенно неприемлемо для Галилея, отрицавшего дальнодействующие силы, в частности, попытки объяснять земные явления влиянием небесных тел. Особенно это относилось к приливам, которые Галилей ошибочно считал важнейшим доказательством движения Земли. Объяснения указанного типа Галилей отождествлял с астрологией, в которой события в человеческой жизни объясняются влиянием планет. «Среди великих людей, рассуждавших об этом

поразительном явлении природы, более других удивляет меня Кеплер, который, обладая умом свободным и острым и будучи хорошо знаком с движениями, приписываемыми Земле, допускал особую власть Луны над водой, сокровенные свойства и тому подобные ребячества». Кеплер оказался прав, но реальные аргументы появились позднее.

Следует иметь в виду, что рассуждения Кеплера о взаимном притяжении содержат много путаницы. В одном отношении он серьезно отставал от Галилея: он считал, следуя Аристотелю, что скорость пропорциональна силе.

МЕХАНИКА ЗЕМНАЯ И МЕХАНИКА НЕБЕСНАЯ. К 1610 г. Галилей получил в механике результаты, к которым шел 20 лет. Он начинает работать над всеобъемлющим трактатом, но неожиданные события отвлекают его от этих занятий более чем на 20 лет! Галилей построил телескоп и в начале 1610 г. открыл спутники Юпитера. Весь этот год астрономические открытия следовали одно за другим. Галилей полагает, что у него появились решающие доказательства в пользу системы Коперника. Следующие 23 года жизни он целиком посвятил утверждению этой системы, пока в 1633 г. приговор инквизиции не прервал эту деятельность. Все эти годы Галилей вспоминает о механике постольку, поскольку этого требует разработка «Системы мира». Временами его новая философия даже входит в противоречие с результатами о «земных» движениях. Так, он не находит во Вселенной, «где все части находятся в отличнейшем порядке», места для прямолинейного движения, которое в этих условиях представляется ему «излишним и неестественным». Причина в том, что движение по прямой не может быть периодическим и состояние Вселенной должно все время меняться. Он оставляет место прямолинейному движению лишь в неустойчивых ситуациях, а в природе должно царить круговое движение. Открытый им закон инерции для «местных движений» Галилей считает справедливым лишь вблизи Земли.

Так же приближенным считает Галилей закон движения брошенных тел по параболе. Он считает, что на самом деле траектория должна быть такова, чтобы заканчиваться в центре Земли. Из-за этого уже после открытия параболичности траектории он делал странные заявления о том, что движение брошенного тела должно происходить по дуге окружности или винтовой линии. Это вызвало возражение Ферма, переданное через Каркави

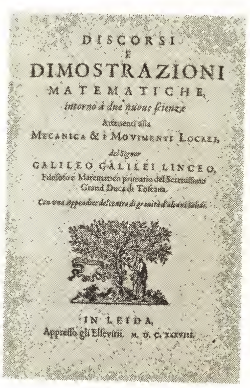
(1637 г.). В ответ Галилей объявляет свое высказывание «поэтической фикцией», обещает опубликовать утверждение о параболичности траектории, но в заключение пишет: «Никакого отступления от параболического движения не произойдет, пока мы производим опыты на Земле, на высотах и расстояниях, нам доступных; но эти отступления будут заметны, велики и огромны при подходе и значительном приближении к центру». Приближенный характер параболической траектории был прояснен Ньютоном, но ожидания Галилея не оправдались *).

Главный вопрос о движении, который интересовал Галилея все эти годы, был связан со стандартным возражением противников движения Земли: почему предметы не улетают с движущейся Земли. У Галилея нет сомнений, что за это ответственна сила тяжести, но как дать мотивированное объяснение? Пусть тело движется по сфере радиуса R со скоростью v. Так начинает Галилей свои рассуждения. Зафиксируем начало отсчета. Если бы не сила тяжести, тело продолжало бы прямолинейное движение по касательной со скоростью v. Чтобы обеспечить движение по сфере (удержать тело), надо добавить к этому движению движение по направлению к центру. Привычное для Галилея рассмотрение со сложением движений! Что оставалось сделать? Заметить, что (по теореме Пифагора) для второго движения путь $s(t) = \sqrt{R^2+v^2t^2} - R$, а если время t мало, то это почти то же самое, что $\tilde{s}(t)=\frac{v^2t^2}{2R}\left(\frac{s-\tilde{s}}{t^3}\to 0 \text{ при } t\to 0\right)$. Теперь уже нельзя не узнать формулы Галилея для пути при равномерно ускоренном движении с ускорением $a=v^2/2R$. Ясно, что если $g>a$, то тело будет удерживаться на поверхности сферы. Однако второй половины рассуждения Галилей не провел, перейдя вместо этого к очень путанным мотивировкам. А формулу для центростремительного ускорения на пути, намеченном Галилеем, получил Гюйгенс в 1659 г.

---

*) Поскольку Галилей надолго задержал публикацию, первое упоминание о параболической траектории появилось в 1632 г. в «Зажигательном зеркале» Кавальери, который очень ясно усвоил от Галилея идею сложения прямолинейных движений, принцип инерции. Галилея обидело отсутствие необходимых ссылок, он говорит об открытии параболичности траектории как главной цели сорокалетних трудов. Извинения Кавальери быстро удовлетворили Галилея.

«БЕСЕДЫ». В 1633 г. находясь в ссылке в Сиенне, уже через несколько недель после приговора инквизиции и отречения, Галилей вспомнил о своих давних результатах по механике и решил немедленно записать их. Он продолжает работу в Арчетри и Флоренции, несмотря на вынужденное одиночество, ухудшающееся здоровье,


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuove scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con una Appendice del centro di gravità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

Титульный лист «Бесед».

прогрессирующую слепоту. «Я хотя и молчу, но провожу жизнь не совсем праздно» — писал Галилей. Книга «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению» была закончена в 1636 г., с большими предосторожностями переправлена за границу (не ясно было, как отнесется к книге инквизиция) и вышла в Голландии в июле 1638 г. Как и предыдущая книга, явившаяся причиной преследования, «Беседы» написаны

в форме диалогов, которые в течение шести дней ведут те же самые герои: Сальвиати (проводящий точку зрения автора), Сагредо и Симпличио (сторонник Аристотеля; его имя переводится как «простак»). В третий и четвертый дни они читают трактат академика (Галилея) «О местном движении» и подробно обсуждают его. Кстати, в названии книги «механика» и «движение» разделены, поскольку в те годы к механике было принято относить лишь статику и сопротивление материалов. Выбранная автором форма дискуссий позволяет многое узнать о том, как Галилей шел к своим открытиям.

Престарелый Галилей стремился реализовать свои давно оставленные замыслы. Но многое уже было ему не по силам, он нуждался в помощниках. Он поручает сыну Винченцо построить часы на основе открытого в юности свойства маятника, но ему не удалось увидеть свою идею осуществленной. Инквизиция ограничивает контакты Галилея с внешним миром. Уже после окончания «Бесед» на вилле Арчетри, которую Галилей называл своей тюрьмой, стали появляться желанные гости. Это старый друг и верный ученик Бенедетто Кастелли, Кавальери; а Вивиани и Торричелли с некоторых пор не покидают учителя. Они помогали в завершении его дел, продолжали его исследования.

Так, Торричелли вычислил вектор скорости брошенного под углом тела при помощи правила сложения скоростей, а поскольку скорость направлена по касательной, он получил изящный способ проводить касательную к параболе. Наступала эра дифференциального и интегрального исчисления и задачи о проведении касательных к кривым выходили в математике на передний план. Разрабатывались различные способы их проведения. Одним из них стал кинематический способ, при котором кривая представлялась как траектория сложного движения, а касательная находилась при помощи сложения скоростей, как это впервые сделал Торричелли для параболы. Французский математик Жиль Пирсон, более известный под именем Роберваль (1602—1675), творил при помощи этого приема чудеса. «Механические» кривые, полученные как траектории различных движений, прочно вошли в обиход математического анализа. Стоит вспомнить, что сам Галилей сознательно ограничивал себя рассмотрением движений, реально в природе встречающихся: «Хотя, конечно, совершенно допустимо представлять себе любой вид дви-

жения и изучать связанные с ним явления (так, например, можно определить основные свойства винтовых линий или конхоид, представив их себе возникающими в результате некоторых движений, которые в действительности в природе не встречаются, но могут соответствовать предположенным условиям), мы тем не менее решили рассматривать только те явления, которые действительно имеют место в природе...». Пользу общего взгляда на движение продемонстрировал Ньютон.

«Беседы» надолго определили развитие механики. Они были настольной книгой для Гюйгенса и Ньютона, великих наследников Галилея. Трудно себе представить, насколько бы задержалось развитие механики, если бы не произошли печальные события и Галилей так и не записал бы своих великих открытий.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОБАВЛЕНИЕ. У истории открытия закона свободного падения есть еще одна сторона: это — история не только о совершившемся открытии, но и об открытии... упущенном. После того как Галилей понял, что по закону $v(t)=cs(t)$ движение происходить не может, он потерял интерес к этому закону. Его интересуют только естественные движения! Вскоре шотландский лорд Непер заинтересовался движением, происходящим по аналогичному закону.

Непер рассмотрел прямолинейное движение, происходящее по закону $v(t)=l(t)$, где $v(t)$ — мгновенная скорость в момент времени t, а $l(t)$ — это уже не пройденный путь, а расстояние движущейся точки в момент t от фиксированной точки O на прямой. Случай, рассмотренный Галилеем, отвечает ситуации, когда движущаяся точка находится в начальный момент $t=0$ в точке O, т. е. $l(0)=0$, $l(t)=s(t)$. У Непера $l(0)<0$, $l(t)=l(0)+s(t)$.

Оказывается, что при $l(0)>0$ движение с такими свойствами в принципе происходить может и обладает замечательными математическими свойствами (хотя «в природе и не происходит»!). Исследуем его. Прежде всего, если начальное расстояние $l(0)$ умножить на c, то на c умножается расстояние $l(t)$ и скорости $v(t)$ во все моменты времени. Строго говоря, это нуждается в обосновании! Но ясно, что при умножении l и v на константу закон $v(t)=l(t)$ сохранится. Далее, ограничимся случаем $l(0)=1$. Тогда

$$l(t_1+t_2)=l(t_1)\,l(t_2).$$

Наметим доказательство этого соотношения. Удобно объявить момент t_1 новым началом отсчета времени. Тогда в силу сказанного выше в новый момент t_2 (старый t_1+t_2) расстояние до O должно быть в $l(t_1)$ раз больше, чем в старый момент t_2. Это и означает, что $l(t_1+t_2) = l(t_1)\, l(t_2)$. Так впервые появилась в науке показательная функция!

Имеем: $l(t)=e^t$, где $e=l(1)$, т. е. это расстояние от O в момент $t=1$. Пользуясь тем, что e — расстояние от O в момент времени $t=1$, и тем, что $v=l$, нетрудно показать, что $e>2$ (докажите!). На самом деле $e=2{,}71828...$; e стали называть числом Непера. Рассматривая движения, происходящие по закону $v(t)=kl(t)$, можно получить показательные функции с другими основаниями.

Для всякого положительного a время t, для которого $l(t)=a$, назовем логарифмом (натуральным) a (обозначается $\ln a$) *). В силу сказанного выше $\ln ab = \ln a + \ln b$. Двадцать лет составлял Непер таблицы логарифмов, и в 1614 г. вышло «Описание удивительной таблицы логарифмов», предуведомление к которой содержало извинения за неминуемые ошибки и кончалось словами: «Ничто сначала не бывает совершенным».

Открытие Непера замечательно не только тем, что он создал таблицы логарифмов, но и тем, что он показал, что новые функции могут появляться при изучении движений. Начиная с этих работ Галилея и Непера, механика стала для математики постоянным источником новых функций и кривых.

11. МЕДИЧЕЙСКИЕ ЗВЕЗДЫ

В ноябре 1979 г. Ватикан решил реабилитировать Галилео Галилея, осужденного судом инквизиции в 1633 г. Тогда Галилей был признан «сильно заподозренным в ереси», за то, что «держался и защищал в качестве правдоподобного мнение..., будто Солнце есть центр мира и не движется, а Земля не есть центр мира и движется». На проходившем в ноябре 1979 г. заседании Ватиканской Академии наук, посвященной столетию Эйнштейна, Иоанн Павел II отметил, что Галилей «много страдал — мы не

*) Рассмотрения Непера были не совсем такими и неперовы логарифмы отличаются от натуральных.

можем теперь скрывать этого — от притеснений со стороны церкви», но квалифицировав покаяние Галилея, «как божественное озарение в уме ученого», он утверждал, что трагедия Галилея подтверждает «гармонию веры и знания, религии и науки». В октябре 1980 г. появились сообщения, что папа распорядился провести дополнительное расследование обстоятельств процесса над Галилеем. Разговоры об оправдании Галилея шли еще на II Ватиканском соборе (1962—1965). Оправдание хотели приурочить к 400-летию ученого в 1964 г., но, видимо, не успели, поскольку вопрос оказался небесспорным. При этом труды Галилея (наряду с трудами Коперника и Кеплера) были удалены из «Индекса запретов» уже в 1835 г. Суд над Галилеем, его отречение не переставали волновать людей, часто далеких от науки, три с половиной века. Характерно внимание, которое уделила этой проблеме художественная литература (достаточно вспомнить пьесу Бертольда Брехта «Жизнь Галилея»). Проблема Галилея жива и сегодня, несмотря на недавнюю «реабилитацию» ученого.

На рубеже XVI и XVII веков с вопросом о системе мира дело обстояло не просто. В IV веке до н. э. Аристотель утверждал, что семь видимых светил равномерно вращаются вокруг Земли, причем вращаются на самом деле хрустальные сферы, к которым они прикреплены, восьмую сферу занимают неподвижные звезды. Астрологи классифицировали планеты так: два светила — Луна и Солнце, две вредоносные планеты — Марс и Сатурн, две благоприятные — Юпитер и Венера и одна нейтральная — Меркурий.

Не в правилах Аристотеля, а особенно его последователей, было объяснять отклонения от его схемы — скажем, удивительное «попятное» движение планет, когда в какой-то момент направление видимого движения планеты изменяется на противоположное. Постепенно накапливались противоречия с точно зафиксированными данными наблюдений. Во II веке н. э. Птолемей построил систему, максимально учитывающую данные наблюдений. При этом он считал, что планеты движутся по вспомогательным окружностям (эпициклам), центры которых (деференты), в свою очередь, вращаются вокруг Земли. Желание учесть новые данные приводило ко все большему усложнению системы. Нужно отдать должное упорству и остроумию ученых, которым удавалось систему спасать.

Совершенно неожиданный путь предложил Николай Коперник (1473—1543). Его тщательно разработанная, согласованная с наблюдениями схема содержит все основные моменты сегодняшнего взгляда на Солнечную систему: вокруг Солнца вращаются планеты, включая Землю; Земля, кроме того, совершает суточное движение; Луна вращается вокруг Земли. При таком подходе все невероятно упростилось, хотя остались невыясненные моменты при согласовании с данными наблюдений. По мнению Коперника, движения планет близки к равномерным движениям по окружности (как у Аристотеля), а несомненно имевшиеся отклонения, по-видимому, опять требовали эпициклов, хотя их роль уже была не столь существенна, как у Птолемея. Эпициклы исчезли лишь у Кеплера, открывшего эллиптичность орбит. Система Коперника не была чисто описательной теорией, основанной на качественных явлениях. Она содержала многочисленные вычисления: расстояния до Солнца, периоды обращений и т. д. Только такая теория могла конкурировать с теорией Птолемея, полно учитывавшей данные наблюдений.

На возможность движения Земли указывали еще пифагорейцы. Поэтому церковь называла учение о движении Земли пифагорейским. Имя Коперника в этом плане предпочитали не употреблять по следующей причине. Книге Коперника «Об обращении небесных сфер» (вышедшей в год его смерти) было предпослано предисловие (возможно, написанное не самим Коперником), в котором его система объявлялась удобной математической схемой для астрономических вычислений и не больше. Рассматриваемые в ней движения объявлялись воображаемыми. А значит, об «истинных» движениях речь в книге не идет. Это не функции математиков! Этот вопрос должны решать философы и богословы в соответствии со священным писанием. Книга была посвящена папе Павлу III. Такой компромисс устраивал церковь, и книга не была объявлена еретической. Математикам можно было позволить пользоваться в их вычислениях воображаемыми схемами. Исключением не были и астрономы-иезуиты, которые пользовались таблицами Коперника, в частности, в расчетах, нужных для реформы календаря.

Незыблемым должно было оставаться утверждение, что Земля покоится, а Солнце движется. Даже в том, что касается остальных планет, церковь не была столь

бескомпромиссной (о них не сказано в писании). Была проявлена терпимость к системе Тихо Браге, у которого Солнце движется вокруг Земли, а остальные планеты вокруг Солнца. Тот же Тихо Браге по существу расстался с хрустальными сферами, утверждая, что кометы не принадлежат «подлунному миру», а прилетают извне (Галилей, кстати, придерживался иной точки зрения).

Итак, система Коперника — удобная математическая фикция, а учение пифагорейцев — ересь. Так проходила граница. На этот компромисс и не готов был согласиться Галилей: «Коперника, на мой взгляд, нельзя смягчить, ибо движение Земли и недвижимость Солнца — существеннейший пункт и общий фундамент его учения. Поэтому его надо либо целиком осудить, либо оставить таким, как он есть!» Галилей настаивал, что движение Земли не воображаемое, а истинное.

К решительной борьбе за гелиоцентрическую систему мира Галилей шел непростой дорогой. Рано поверив в систему Коперника, он долго не решался опубликовать свои аргументы в ее пользу (об этом свидетельствует письмо Кеплеру 1597 г.). XVII век начался сожжением Джордано Бруно, поэта и философа, грезившего об иных мирах, подобных Солнечной системе. К 1610 г. Галилей подошел к пику своей научной деятельности: блестяще завершились его двадцатилетние исследования естественных движений (свободного падения и движения брошенного тела). Он начинает труд о своих великих открытиях и неожиданно оставляет его на неопределенный срок. Что же случилось? В научной жизни Галилея произошли события, которые заставили вполне практичного Галилея отодвинуть на второй план публикацию открытий, которым была отдана молодость. Галилей решает, что у него появились решающие аргументы в пользу системы Коперника и отныне вся его жизнь нацелена на пропаганду этих идей. Вспомним об этих важных аргументах.

«НОВЫЕ ОЧКИ». Рассказывая о жизни великих ученых, нередко приходится обращать внимание на дела житейские. Более высокое жалование было одной из причин переезда Галилея из Пизы в Падую. Здесь его материальное положение стало более прочным. Первоначальное жалование в 180 флоринов, хотя и медленно, увеличивалось; дополнительный доход давали молодые аристократы, с которыми Галилей занимался отдельно и которые часто жили в его доме. Однако тяжелым грузом легла на

плечи Галилея выплата приданого сестрам, да и его собственная семья росла и требовала все больше средств. В 1609 г. Галилей был озабочен очередными переговорами об увеличении жалования. Скупую и практичную синьорию Венецианской республики могло раскошелить какое-нибудь изобретение, имеющее несомненное практическое применение. Галилей был не чужд техническим задачам. В его доме была прекрасная мастерская, а недавно он сконструировал удобный пропорциональный циркуль («геометрический и военный»), сам следил за его изготовлением и распространением. Можно было бы подумать о таблицах для стрельбы, основанных на параболичности траектории полета снаряда. Но неожиданно возникла совсем другая идея.

В 1608 г. в Голландии появились зрительные трубы, позволяющие разглядывать отдаленные предметы; их называли иногда «новыми очками». Еще Леонардо да Винчи говорил об очках, позволяющих видеть Луну большой, а Роджер Бэкон об очках, делающих человека размером с гору. Честь изобретения оспаривали мастера-оптики Липперсгей и Андриансен. К началу 1609 г. такую трубу можно было купить в Голландии за несколько сольдо. К середине года трубы появились в Париже. Генрих IV проявил пессимизм к новинке, объяснив, что в данный момент ему больше нужны очки, увеличивающие близкие предметы, а не далекие. Тогда же какой-то чужестранец пытался продать зрительную трубу Венецианской республике, не вдаваясь в подробности по поводу ее происхождения. Паоло Сарпи, друг Галилея, дал отрицательный отзыв о возможностях использования зрительной трубы «на войне, на суше и на море». Первые трубы были еще очень несовершенны. Галилей услышал о трубах, когда находился в Венеции.

«...Узнав об этом, я вернулся в Падую, где тогда проживал, и начал размышлять над задачей. В первую же ночь после моего возвращения я ее решил, а на следующий день изготовил инструмент, о котором и сообщил в Венецию тем же самым друзьям, с которыми предшествующий день я рассуждал об этом предмете. Тотчас же я принялся за изготовление другого, более совершенного инструмента, который шесть дней спустя привез в Венецию». В другом месте ситуация описывалась еще более торжественным образом: «...не жалея ни труда и ни средств, я достиг того, что изготовил инструмент, на-

столько совершенный, что при взгляде через него предметы казались почти в тысячу раз крупнее и более чем в тридцать раз ближе, чем видимые естественным образом. Совсем излишне было бы перечисление того, насколько удобны такие инструменты как на суше, так и на море».

На самом деле характеристики труб были более скромными. Первая труба Галилея давала трехкратное увеличение, а труба, привезенная в Венецию,— восьмикратное. Галилей решил при помощи своей совершенной трубы расположить к своей просьбе членов синьории (быть может, это была идея Сарпи). 21 августа самые уважаемые люди Венеции рассматривали с колокольни собора Св. Марка отдаленные кварталы города, а 24 августа Галилей торжественно передал свою трубу дожу Венеции Леонардо Донато. Галилей не скупился на рекламу своего подарка. Он говорит, что извлек его идею «из наиболее сокровенных соображений о перспективе».

Потом много говорили, что Галилей переоценил свой вклад или даже присвоил себе чужое изобретение (об этом идет речь в пьесе Брехта). По крайней мере в публикациях Галилей всегда признавал, что построил свою трубу, услышав об изобретении голландцев (но не имея подробной информации и не видя «фламандской перспективы»). Позднее он подчеркивал оригинальность своего пути: «Теперь мы достоверно знаем, что голландец — изобретатель телескопа — был простым мастером, изготовлявшим обыкновенные очки. Случайно перебирая стекла разных сортов, он взглянул сразу через два стекла, одно выпуклое, другое вогнутое, находившиеся на разных расстояниях от глаза, и при этом увидел и наблюдал возникший эффект и таким образом открыл инструмент. Я же, движимый вышеупомянутым известием, нашел инструмент путем рассуждения». Название «телескоп» предложил Чези (см. ниже) в 1611 г. во время демонстрации трубы Галилея в Риме; раньше Галилей пользовался термином «перспектива». Можно считать, что Галилей продемонстрировал превосходство теории над практикой: многие годы никто не мог создать трубы, сравнимые по возможностям с трубами Галилея (из-за этого, в частности, не получали подтверждения астрономические наблюдения Галилея).

Труба Галилея выполнила свое назначение: ему было назначено пожизненно годовое жалование в тысячу фло-

ринов, невиданное для математика. Галилей должен был изготовить 12 труб для синьории, а никому больше труб не предоставлять.

«ЗВЕЗДНЫЙ ВЕСТНИК». Вскоре Галилей имел трубу с 20-кратным увеличением, а потом он, «оставив дела земные, ...обратился к небесным». В конце 1609 г. Галилей рассматривает через трубу Луну и обнаруживает, «что поверхность Луны не гладкая и не ровная и не в совершенстве сферическая, как полагал в отношении ее целый легион философов, а, напротив того, неровная, шероховатая, испещренная углублениями и возвышенностями, наподобие поверхности Земли». Кроме того, Галилей обращает внимание на пепельный свет на части Луны, не освещенной Солнцем. Он считает этот свет «отблеском Земли». Позднее оказалось, что в то же время начали наблюдения небесных тел при помощи телескопа англичанин Харриот и его ученик Лоуэр (их наблюдения не были известны современникам). Лоуэр писал в письме учителю, что Луна напомнила ему пирог с вареньем, испеченный его кухаркой на прошлой неделе. О пепельном свете на Луне говорили уже Леонардо да Винчи и Местлин, учитель Кеплера.

Затем перед глазами Галилея Млечный Путь распался на отдельные звезды: «...все споры, в течение веков мучившие философов, умолкли сами собой благодаря наглядности и очевидности... Млечный Путь представляет собой ничто иное, как скопление бесчисленного множества звезд, как бы расположенных в кучах...»

Наконец, 7 января 1610 г. Галилей направил телескоп в сторону Юпитера. Вблизи Юпитера он обнаружил три звезды. Он не сомневался, что видит обычные «неподвижные» звезды, но что-то привлекло его пристальное внимание. На следующую ночь Галилей, «водимый неизвестно какой судьбой», вновь рассматривает Юпитер. Он имел все основания не сожалеть! Он вновь увидел знакомые звезды, но... их положение относительно Юпитера изменилось: вчера они располагались по разные стороны Юпитера, а сегодня — все были по одну сторону. Пока еще можно продолжать считать звезды неподвижными, а изменение взаимного положения объяснить движением Юпитера. 9 января «небо со всех сторон было обложено тучами». 10 и 11 января Галилей нашел только две из трех звезд, а 13 января, напротив, появилась четвертая.

Зреет новое решение: виденные им звезды перемещаются относительно Юпитера, это его спутники — лу́ны — и их исчезновение объясняется их затмением. К концу месяца Галилей уверен в этом, «переходя от ощущения загадки к чувству восхищения». Он пишет флорентийскому министру Винте: «Но наибольшим из всех чудес представляется то, что я открыл четыре новые планеты и наблюдал свойственные им их собственные движения и различия в их движениях относительно друг друга и относительно движений других звезд. Эти новые планеты движутся вокруг другой большой звезды таким же образом, как Венера и Меркурий и, возможно, другие известные планеты движутся вокруг Солнца». Нет сомнений, в каком контексте Галилей рассматривал свое открытие, но какую осторожную формулировку употребляет он пока в отношении «других известных планет».

До 2 марта Галилей наблюдает за спутниками Юпитера, пользуясь каждой безоблачной ночью, а уже 12 марта выходит его знаменитый «Звездный вестник, возвещающий великие и очень удивительные зрелища и предлагающий на рассмотрение каждому, в особенности же философам и астрономам, Галилео Галилеем, Флорентийским патрицием, Государственным математиком Падуанской гимназии, наблюденные через подзорную трубу, недавно им изобретенную, на поверхности Луны, бесчисленных неподвижных звездах, Млечном Пути, туманных звездах и, прежде всего, на четырех планетах, вращающихся вокруг звезды Юпитера на неодинаковых расстояниях с неравными периодами и с удивительной быстротой...»

Далее на все сказанное выше наложились дела житейские. Оказалось, что жалование прибавят только через год, а кроме того, Галилея стали очень тяготить преподавательские обязанности. Он начинает думать о переезде во Флоренцию. Только что умер герцог Фердинандо Медичи и на престол вступил Козимо II, бывший учеником Галилея. Покровительство герцога может быть незаменимым при решении многих проблем, особенно в трудном деле защиты системы Коперника. Уже нет сомнений, что это будет главным делом Галилея. Он пишет в письме Винте в связи с возможным переездом: «Труды, которые мне предстоит довести до конца, суть прежде всего два тома «Система мира», огромный замысел, исполненный философии, астрономии и геометрии».

А пока Галилей предлагает через Винту назвать спутники Юпитера в честь Козимо Медичи Космейскими или Медичейскими звездами. Был выбран второй вариант. Количество спутников удачно совпадало с тем, что у Козимо было три брата. «Звездный вестник» посвящается Козимо Медичи: «Называя новые звезды, открытые мной, величавым именем рода Медичи, я сознаю, что если прежде возвышение в звездный мир служило для прославления богов и властелинов, то в данном случае, наоборот, величавое имя Медичи обеспечит бессмертное воспоминание об этих звездах». Потом все четыре спутника получили собственные имена (Ио, Европа, Ганимед, Каллисто), а чтобы отличить от открытых позднее спутников Юпитера, их будут называть галилеевыми.

На пасхальные каникулы Галилей отправился во Флоренцию. Он везет с собой трубу, чтобы герцог мог сам увидеть «свои» звезды. Галилей окружен почетом, в его честь должна быть выбита медаль с изображением Медичейских звезд, вчерне договариваются об условиях переезда, лишь уточняется название должности Галилея. Государю приятно увековечить свое имя на небе, никто из царственных особ не может похвастаться этим. 14 мая Галилей получает из Франции письмо от 20 апреля, в котором его просят «открыть возможно скорей какое-либо небесное тело, которому могло бы быть дано имя его величества». Речь идет о Генрихе IV. Уточняется, что звезду следует назвать «именем Генриха без добавления Бурбон». Оказалось, что автор письма не зря торопил Галилея: пока шло письмо, «сопутствуемый счастьем государь» был убит. Позднее Галилей писал во Флоренцию, что дом Медичи оказался в исключительном положении: ни у Марса, ни у Сатурна спутников не оказалось (через 50 лет Гюйгенс и Кассини открыли спутники Сатурна, потом обнаружились спутники и у Марса).

Сомнения не покидали герцога. Упорно распространялись слухи, что подаренные ему звезды — плод фантазии Галилея или порождение его трубы. Об этом говорил даже Христофор Клавий, первый математик Римской коллегии. Положение осложнялось тем, что никто из астрономов, кроме самого Галилея, Медичейских звезд не видел. Галилей расплачивался за то, что ни у кого не было столь совершенных труб, как у него. Столь важное открытие должны подтвердить три самых знаменитых астро-

нома: Кеплер, Маджини, Клавий. А пока вопрос о переезде во Флоренцию откладывался.

КЕПЛЕР, МАДЖИНИ, КЛАВИЙ. Казалось, что проще всего обстоит дело с Маджини. Галилей по дороге из Флоренции в Падую остановится в Болонье и покажет ему открытые звезды. Маджини, славившийся в равной мере своими вычислительными способностями и хитростью, подчеркнуто предупредителен, но он делает вид, что не может ничего увидеть около Юпитера. Он не спорит, готов объяснить все своим ослабевшим зрением, но это не может утешить Галилея.

Кеплер сразу откликнулся на сообщение об открытии Галилея. Уже 19 апреля он пишет Галилею восторженное письмо. Оказывается, что известие о новых планетах пришло в Германию еще в середине марта. Кеплер в мягкой форме журит Галилея за отсутствие ответа на его «Новую астрономию», содержащую два первых его закона и недавно посланную Галилею: «...ты, мой Галилей, вместо чтения чужой книги занялся собственной невероятнейшего содержания о четырех до сих пор неизвестных планетах..., найденных при помощи двойной зрительной трубы».

Первоначальная информация была расплывчата, Кеплер испугался, что Галилей открыл новые (сверх шести) планеты в Солнечной системе, а он твердо держался мнения, что планет ровно шесть, причем число шесть не случайно, а связано с тем, что имеется пять правильных многогранников. Фантазия Кеплера рождает еще одну возможность: все планеты подобно Земле имеют по одной Луне, их и должен был открыть Галилей: «...если Земля, по Копернику, одна из планет, имеет свою движущуюся вокруг нее Луну и выходящую из общего счета, то, конечно, могло случиться, что Галилей действительно мог увидеть еще четыре луны, вращающиеся в очень тесных пределах вокруг малых тел Сатурна, Юпитера, Марса и Венеры; Меркурий же — самый последний из окружения Солнца, настолько погружен в его лучи, что в нем Галилей до сих пор не мог заметить чего-нибудь подобного». Кеплер повсюду ищет числовые закономерности! Затем он думает о том, что речь может идти о планетах, вращающихся около «неподвижных звезд», а не Солнца. Вспоминает бесчисленные миры Джордано Бруно и уже думает «о возможности после этого начала сделать открытия там еще бесчисленного множества новых планет».

Тем временем император Рудольф II (Кеплер был императорским астрономом) получает «Звездный вестник». Кеплер безоговорочно доверяет сообщению Галилея: «Может быть, я покажусь слишком смелым, если так легко поверю твоим утверждениям, не подкрепившись никаким собственным опытом. Но почему же мне не верить ученейшему математику, о правоте которого свидетельствует самый стиль его суждений, который далек от суетности и для стяжания общего признания не будет говорить, что видел то, чего на самом деле не видел, не колеблясь из любви к истине противоречить распространеннейшим мнениям».

А самого Кеплера, разумеется, волнуют закономерности в распределении числа спутников у планет: «Лучше я пожелаю, чтобы у меня была готова зрительная труба, с которой я обогнал бы тебя в открытии двух (так мне кажется, требует пропорция) спутников Марса и шести или восьми Сатурновых, к которым, может быть, прибавится один-другой вокруг Венеры и Меркурия». Кеплер не знал, остановиться ему на арифметической или геометрической прогрессии!

Кеплер указывает Галилею на ряд предшественников (Местлин говорил о пепельном свете Луны, Порто предсказывал возможность создания зрительной трубы). Кеплер надеется, что Солнце ярче неподвижных звезд, и ему хочется верить в исключительность нашего мира: «наш мир не принадлежит к простому стаду других бесконечных». Нет предела фантазиям Кеплера: «не будет непохожим на истину предположение, что не только на Луне, но и на Юпитере имеются жители... Дай корабли или приспособь паруса к небесному воздуху, и найдутся люди, которые не побоятся и такой обширности...».

Маджини пытается привлечь Кеплера на свою сторону. Кеплер неумолим: «Мы оба коперниканцы — свой своему радуется». Критические замечания из «Разговора Иоганна Кеплера со звездным вестником» (ответа Галилею) обнадежили Маджини: «Теперь остается только этих четырех новых прислужников Юпитера изгнать и уничтожить». Серию памфлетов против Галилея открыл в мае 1610 г. Мартин Горкий, астроном из окружения Маджини. В его «Кратчайшем странствии против «Звездного вестника»» спутники Юпитера объявлялись оптическим обманом. Кеплер не постоянен в своем отношении к Горкому. В письме к Галилею это сочинение называется наглым, он «удив-

ляется дерзости этого юнца». Самому Горкому, выражая удивление его продолжающимся сомнениям в «звездах Галилея», Кеплер пишет: «...не удивляюсь и не обвиняю тебя; мнения философствующих должны быть свободными».

Кеплера начало волновать отсутствие подтверждений. Он сам все еще не имел подходящей трубы. Из Болоньи пришло заключение университета, что в собственную трубу Галилея звезды не видны (инсценировка Маджини). В августе обеспокоенный Кеплер пишет Галилею: «Я не могу скрыть от тебя, что в Прагу приходят письма многих итальянцев, что при помощи твоей зрительной трубы нельзя видеть эти планеты... Поэтому я прошу тебя, Галилей, чтобы ты возможно скорее привел некоторых свидетелей... На тебе одном лежит все доказательство истинности наблюдения». К счастью, император Рудольф II, известный не только своими причудами, но и любовью к наукам, воспылал страстью к зрительным трубам. Наконец, в Праге появилась достаточно совершенная труба и в сентябре Кеплер наблюдал спутники Юпитера. Участники наблюдения независимо зарисовали положения звезд и рисунки совпали. «Ты победил, Галилеанин!» — воскликнул Кеплер.

В сентябре спутники Юпитера видел Сантини в Венеции, а в декабре пришло особенно радостное известие: спутники наблюдал Клавий. Правда, он еще не был «уверен, планеты это или нет». В сентябре Галилей переехал во Флоренцию. Он вступает в переписку с Клавием (находясь в Венецианской республике, переписываться с иезуитами было нельзя). «Воистину вы, ваша милость, заслуживаете великой похвалы, поскольку вы первый, кто это наблюдал» — пишет Галилею Клавий. Нашел Галилей путь и к сердцу Маджини. Он рекомендовал его работы по зажигательным стеклам герцогу, способствовал получению освободившейся кафедры в Падуе (Маджини претендовал на это место, еще когда Галилей переезжал в Падую из Пизы). Осторожный Маджини положительно отзывается о свидетельстве Сантини. На большее рассчитывать не приходилось!

ГОД ВЕЛИКИХ ОТКРЫТИЙ. 1610 год, начавшийся открытием спутников Юпитера, был необычайно счастливым для Галилея-астронома: почти все свои замечательные астрономические наблюдения он сделал именно в этом году. 25 июля Галилей снова наблюдал «Юпитера

3 *

утром на Востоке вместе с его свитой». После этого он обнаружил «еще другое необычайнейшее чудо». Он сообщает о своем открытии во Флоренцию, прося держать его в тайне до публикации: «Звезда Сатурна не является одной только, но состоит из трех, которые как бы касаются друг друга, но между собой не движутся и не меняются..., причем средняя из них примерно в три раза больше, чем две боковые». Кеплеру Галилей посылает зашифрованную в виде анаграммы фразу: «Высочайшую планету тройною наблюдал». Позднее Галилей писал: «Я нашел целый двор у Юпитера и двух прислужников у старика (Сатурна), они его поддерживают и никогда не отскакивают от его боков».

Пять месяцев не раскрывал Галилей своей тайны. Кеплеру и Рудольфу II не терпелось узнать разгадку, строились самые невероятные предположения: «Удовлетвори как можно быстрее наше страстное желание узнать, в чем состоит твое новое открытие. Не существует человека, которого ты мог бы опасаться как соперника». Галилей раскрыл тайну, добавив, что в более слабую трубу Сатурн напоминает маслину. Так получилось, что открытие Галилея (с необходимыми ссылками) впервые упоминается в печати в предисловии к «Диоптрике» Кеплера.

Через два года Сатурн неожиданно перестал быть трояким. Галилей связал это с движением Сатурна вокруг Солнца и предсказал, что скоро его снова можно будет наблюдать в виде трех звезд. Предсказание сбылось, но тайны Сатурна Галилей не разгадал. Тайна раскрылась, когда в 1655 г. Гюйгенс, рассматривая Сатурн в телескоп с 92-кратным увеличением, обнаружил, что Сатурн окружен кольцом, которое при меньшем увеличении казалось боковыми звездами. Кольцо становится незаметным, когда наблюдатель оказывается в его плоскости. Это редкое явление и посчастливилось наблюдать Галилею. Такова была эволюция зрительных впечатлений от Сатурна по мере усиления телескопов: от маслины до шара, окруженного кольцом. Гюйгенс открыл также самый большой спутник Сатурна — Титан.

Вскоре после того, как было послано письмо Кеплеру с разгадкой анаграммы, появились новости и о других планетах. Галилей давно пристально наблюдал за Венерой и когда она была утренней звездой, и когда стала вечерней. С Венерой и Меркурием было много хлопот и у сторонников Птолемея, и у сторонников Коперника. Первые не

могли договориться, где помещаются их «сферы» — внутри «сферы» Солнца или вне. Для сторонников Коперника было ясно, что если эти планеты являются темными телами, то поскольку они располагаются между Солнцем и Землей, временами должны наблюдаться неполные диски планет (должны наблюдаться явления, подобные фазам Луны). Этой проблемы не возникает, если предполагать, что планеты светят собственным светом (по-видимому, так думал Кеплер) или что они прозрачны (эта возможность серьезно обсуждалась). Быть может, телескоп поможет увидеть то, что не удавалось увидеть простым глазом?

Об этой проблеме напоминает Кастелли в письме Галилею от 5 декабря 1610 г.: «Поскольку (как я верю) правильно положение Коперника, что Венера вращается вокруг Солнца, то ясна необходимость того, чтобы она наблюдалась нами иногда рогатой, иногда же нет..., если, однако, небольшая величина рогов и испускание лучей не мешает нам постоянно наблюдать эти различия». Но вряд ли Галилей нуждался в этом напоминании. Уже 10 декабря он отправляет в Прагу Кеплеру через тосканского посла Джулиано Медичи шифрованное сообщение об открытии фаз Венеры с сопроводительным письмом: «Я посылаю Вам шифрованное сообщение о еще одном моем необычном наблюдении, которое приводит к разрешению важнейших споров в астрономии и которое содержит важнейший аргумент в пользу пифагорейской и коперниканской системы». Кеплеру, как всегда, не терпится узнать разгадку: «Ты же видишь, что имеешь дело с немцем из немцев!»

Но первым, кому Галилей раскрыл свою тайну, был Клавий. Галилей только что получил от Клавия известие, что астрономы Римской коллегии наблюдали и спутники Юпитера, и удлиненную форму Сатурна. Поддержка Римской коллегии играла особую роль в планах Галилея, и он спешит удивить Клавия своим новым открытием. Галилей описывает свои наблюдения над Венерой после «ее вечернего появления», рассказывает о том, как неожиданно ее круглая форма стала искажаться со стороны, обращенной к Солнцу, пока Венера не стала напоминать полукруг; потом она «стала заметно рогатой». Предсказывается, какую форму будет принимать Венера, когда она будет наблюдаться в виде утренней звезды, и вот вывод: «Так вот, синьор мой, выясняется, как Венера (и несомненно, что то же самое сделает и Меркурий) движется вокруг

Солнца, являющегося, вне всякого сомнения, центром наибольших обращений всех планет. Кроме того, мы уверены, что эти планеты сами по себе являются темными и блестят только освещенные Солнцем, чего, как я думаю, не происходит с неподвижными звездами по некоторым моим наблюдениям...». У Клавия не должно было остаться сомнений в том, куда клонит Галилей! Так закончился для Галилея год его великих астрономических открытий.

Галилей не прекратил в дальнейшем астрономических наблюдений, но в основном это было продолжение того, что было наблюдено в 1610 г. Он продолжал наблюдения над солнечными пятнами, начатые летом 1610 г., и к 1613 г. обнаружил осевое вращение Солнца; мы уже говорили о наблюдении исчезновения «придатков» Сатурна. В конце жизни, перед тем как окончательно ослепнуть, Галилею посчастливилось открыть явление либрации Луны (в результате которого наблюдению доступно более половины поверхности Луны). Но Галилей уже никогда не будет уделять столько времени совершенствованию телескопа и астрономическим наблюдениям. И никогда великие тайны мироздания не будут открываться ему так, как в этот великий год! Достижения Галилея были столь велики, что пройдет не менее полувека, прежде чем в наблюдательной астрономии появятся открытия, сравнимые с открытиями Галилея (Гюйгенс, Кассини). А пока Галилея начинают волновать другие проблемы и для решения этих проблем ему важно было поехать в Рим.

ПОКОРЕНИЕ РИМА. Галилей прибыл в Рим 29 марта 1611 г.; он прибыл как лицо, пользующееся особым вниманием тосканского герцога (в герцогских носилках, остановился в римском дворце Медичи). Любезно приняли Галилея четыре астронома Римской коллегии Клавий, Гринберг, Малькотий, Лембол. Галилей обнаруживает, что отцы-иезуиты систематически наблюдают в трубы Медичейские звезды, пытаются определить их периоды. 21 апреля один из руководителей Священной службы кардинал Роберто Беллармино посылает им официальный запрос «о новых небесных наблюдениях одного выдающегося математика» (имя не указано) относительно Млечного Пути, Сатурна, Луны, спутников Юпитера. 24 апреля был получен ответ, в основном подтверждающий наблюдения. Указывались небольшие расхождения в наблюдениях (звезды, образующие Сатурн,

не показались им разделенными) и существенные — в интерпретации виденного на Луне (не горы, а неравномерная плотность «лунного тела»).

14 апреля Галилей (пятым по счету) стал членом Академии Линчеев (рысьеглазых), основанной восемь лет назад Федерико Чези, маркизом Монтичелли. Эта Академия ставила своей целью свободное, не связанное никакими рамками изучение природы. Позднее Чези писал Галилею: «Те же, кого мы примем, не будут рабами ни Аристотеля, ни какого-либо другого философа, а людьми благородного и свободного образа мыслей в исследовании природы». Дружба с Чези играла важную роль в дальнейшей жизни Галилея; теперь он ставил на своих работах имя «Галилео Линчео». На вершине Яникульского холма состоялась демонстрация удивительной трубы Галилея (тогда и предложил Чези называть ее телескопом).

Галилея чествует и Римская коллегия. Доклад, получивший название «Звездный вестник Римской коллегии», читает Одо Малькотий. Он называет Галилея «самым знаменитым и счастливейшим из живущих ныне астрономов», восхищается его открытиями, но в мягкой форме сообщает, что предлагаемые Галилеем объяснения открытых явлений не являются единственно возможными. Галилею дают понять, в каких рамках он должен держаться. Очень точно это пожелание выражено в словах Гвальдо: «...вы должны довольствоваться славой, которую приобрели благодаря наблюдениям Луны, четырех планет и подобных вещей, и не браться защищать мысль, столь противную человеческому разумению...». Следующая мысль Гвальдо предвещала путь, который позднее выберет Галилей: «Существует много вещей, которые можно сказать в виде диспута, но которые не было бы хорошо утверждать как истинные, в особенности, если имеешь против них всеобщее мнение, впитанное, если можно так сказать, с сотворения мира». По-видимому, пределы дозволенного указал Галилею и кардинал Беллармино во время аудиенции. Еще более определенное предупреждение сделал Беллармино тосканскому послу Никколини: «Галилей должен держаться в указанных рамках, иначе его работы будут переданы для рассмотрения богословам-квалификаторам» (а посол должен был понимать, что ничем хорошим это не кончится).

В остальном поездка Галилея была успешной. Кардинал дель Монто писал герцогу: «Галилей в дни, когда

был в Риме, доставил много удовлетворения и, думаю, получил его сам, ибо имел возможность столь хорошо демонстрировать свои открытия, что все достойные и сведущие люди этого города признали их не только достовернейшими и действительнейшими, но и поразительнейшими. Если бы мы жили теперь в республике Древнего Рима, то я убежден, что ему бы воздвигли статую на Капитолии, дабы почтить его исключительную доблесть».

«ФИЛОСОФ И ПЕРВЫЙ МАТЕМАТИК ВЕЛИКОГО ГЕРЦОГА». Итак, не прошло и года как удивительные астрономические открытия Галилея получили признание. Не следует думать, что заключение Римской коллегии прекратило обвинения против Галилея. Люди, отрицавшие существование новых планет, по-прежнему находились. Подозрения к зрительным трубам сохранялись. Аргументация бывала самой нелепой (быть может, с сегодняшней точки зрения). Вот цепь рассуждений некоего Сицци. Зрительная труба подобна очкам, очки не могут в равной мере годиться для молодых и стариков, а раз и те, и другие видят в трубе Галилея планеты, то это обман зрения. А например, Либри из Пизы просто отказывался смотреть в зрительную трубу. «Я надеюсь, что, отправляясь на небо, он, наконец, заметит моих спутников, которых не желал видеть с Земли»,— говорил Галилей после его смерти. Многие противники Галилея понимали, что особенно эффективны доносы в инквизицию с утверждениями о том, что высказывания Галилея противоречат священному писанию.

Но если так обстоит дело с явлениями, доступными непосредственному наблюдению, то какие опасности угрожали Галилею за его высказывания в пользу системы Коперника! В «Звездном вестнике» Галилей обещал написать «Систему мира», в которой он «шестьюстами доказательствами и натурфилософскими рассуждениями» подтвердит, что «Земля движется и своим светом превосходит Луну». Разведка в Риме ясно показала, что в настоящий момент эти рассуждения не встретят поддержки у «начальственных лиц». Галилей не отказывается от своих намерений, но начинает длительную осаду. Он хорошо понимал, что признание Коперника не было внутринаучным вопросом, что ему предстоит, в первую очередь, убедить сильных мира сего, что это потребует всех его сил, отвлечет от непосредственных научных занятий. Оправданность принятого Галилеем решения ставилась под сомнение

многими учеными. Известно мнение Эйнштейна по этому поводу: «Что касается Галилея, я представлял себе его иным. Нельзя сомневаться в том, что он страстно добивался истины — больше чем кто-либо иной. Но трудно поверить, что зрелый человек видит смысл в воссоединении найденной истины с мыслями поверхностной толпы, запутавшейся в мелочных интересах. Неужели такая задача была для него важной настолько, чтобы отдать ей последние годы жизни... Он без особой нужды отправляется в Рим, чтобы драться там с духовенством и политиканами. Такая картина не отвечает моему представлению о внутренней независимости старого Галилея. Не могу себе представить, чтобы я, например, предпринял бы нечто подобное, чтобы отстаивать теорию относительности. Я бы подумал: истина куда сильнее меня, и мне показалось бы смешным донкихотством защищать ее мечом, оседлав Росинанта...» Галилей придерживался иного мнения, но он мало напоминает дон Кихота от науки. Он не столько дрался с «духовенством и политиканами», сколько с величайшим искусством привлекал их на свою сторону.

Приведенное высказывание Эйнштейна интересно сопоставить с мнением пифагорейцев, впервые допустивших движение Земли и неподвижность Солнца: «Постараемся лишь знать что-то для самих себя, находя единственно в этом удовлетворение, и оставим желание и надежду возвыситься в глазах толпы или добиться одобрения философов-книжников».

Прежде всего традиция была такова, что математику не полагалось обсуждать вопрос о строении мира. Наблюдать светила, составлять таблицы, пользоваться таблицами для гороскопов — вот круг обязанностей математика. У Галилея не было вкуса к составлению гороскопов (как, например, у Кеплера), но все же иногда приходилось этим заниматься. Так, в ожидании переезда во Флоренцию он по настоянию герцогини составил гороскоп болевшего герцога Фердинанда (отца нынешнего герцога). Гороскоп обещал благоприятное развитие событий, герцог обрадовался, зять Галилея получил желанную должность, а через несколько дней герцог умер... Для того чтобы рассуждать о строении мира, надо быть, по крайней мере, философом (ведь и жалование у них заметно выше, чем у математиков), а если окажется замешанным священное писание, надо быть непременно богословом. Последнее Галилею недоступно, а вот философом он может попытаться стать.

При переезде во Флоренцию Галилей долго ведет переговоры о названии его будущей должности; он хочет, чтобы в ее названии фигурировало слово философ, ибо «философию он изучал больше лет, чем месяцев чистую математику». В конечном счете договорились о названии «философ и первый математик светлейшего великого герцога тосканского» (первый математик, но не первый философ!).

Свою жизнь во Флоренции он начинает с дискуссий с консервативными философами Пизанского университета, последователями Аристотеля, которые считали, что истину, «говоря их собственными словами, надо искать не в мире и не в природе, а в сопоставлении текстов». Галилей доволен первыми успехами: «Как бы ты, любезнейший Кеплер, принялся хохотать, если бы ты услышал, как в Пизе в присутствии великого герцога первый философ тамошнего университета выступал против меня, силясь аргументами логики, словно колдовскими заклинаниями, сорвать с неба и уничтожить новые планеты!» Его дискуссии касаются не только астрономии. В 1612 г. выходят «Рассуждения о телах, пребывающих в воде», посвященные гидростатике и весьма неприятные для сторонников Аристотеля. Еще через год выходят «Письма о солнечных пятнах», острие которых направлено в ту же сторону: «Эта новость, боюсь, станет похоронным звоном или, скорее, смертным приговором для псевдофилософии..., надеюсь, что гористость Луны станет для перипатетиков шуточным щекотанием по сравнению с муками в виде облаков, паров и обилия дыма, которые постоянно возникают, движутся и исчезают на самом лике Солнца» (из письма к Чези). Перипатетиками называют сторонников учения Аристотеля. Быть может, Галилей преждевременно праздновал победу...

Все больше втягивается Галилей в дискуссии с людьми, далекими от настоящей науки. Иногда его мучают сомнения: «С несказанным отвращением добрался я до сих пор и, словно раскаявшись за содеянное, понял, как бесплодно растратил силы и время». Борьба обострялась. Против Галилея были направлены проповеди доминиканца Каччини, предлагавшего радикальные меры: «Математики должны быть изгнаны из всех католических государств!». Галилей в то же время решается обсуждать богословские проблемы. В 1614 г. распространяется в списках письмо к Кастелли, в котором можно найти такие

слова: «Поскольку речь идет о явлениях природы, которые непосредственно воспринимаются нашими чувствами или о которых мы умозаключаем при помощи неопровержимых доказательств, нас нисколько не должны повергать в сомнение тексты писания, слова которых имеют видимость иного смысла, ибо ни одно изречение писания не имеет такой принудительной силы, какую имеет любое явление природы». Вероятно, именно это письмо послужило поводом для доноса патера Лорини в инквизицию. Оказалось, что Галилей был достаточно аккуратен. Въедливые квалификаторы смогли найти в письме лишь «три дурно звучащих места», причем двух из них в подлиннике не было (инквизиция не смогла получить оригинал послания).

В феврале 1615 г. в Неаполе выходит книга члена ордена кармелитов Фоскарини, в которой в форме письма генералу ордена излагается система Коперника. Беллармино воспользовался этим поводом для изложения в письме к Фоскарини своего отношения к проблеме: «...Ваше священство и господин Галилео мудро поступают, довольствуясь тем, что говорят предположительно, а не абсолютно, я всегда полагал, что так говорил и Коперник. Потому что, если сказать, что предположение о движении Земли и неподвижности Солнца позволяют нам представить явления лучше, чем принятие эксцентров и эпициклов, то это будет сказано прекрасно и не влечет за собой никакой опасности. Для математика это вполне достаточно. Но желать утверждать, что Солнце и действительно является центром мира и вращается только вокруг себя...— утверждать это очень опасно не только потому, что значит возбудить всех философов и теологов-схоластов, это значило бы нанести вред святой вере, представляя положения святого писания ложными». Надо отдать должное главе инквизиции — он выразил свое мнение предельно ясно.

В декабре 1615 г. Галилей опять в Риме. Вероятно, он хотел повлиять на ход идущего по его поводу следствия, да и не потерял он еще надежды изменить мнение церкви по поводу системы Коперника.

«СПАСИТЕЛЬНЫЙ ДЕКРЕТ». Галилей весь во власти дипломатии. Он посещает Беллармино, пытается привлечь на свою сторону кардинала Орсини. В послании к нему излагается самый сокровенный аргумент в пользу движения Земли — приливы и отливы. Он объясняет их взаимодействием суточного и орбитального движений Земли и не видит конкурирующего объяснения. Это объясне-

ние Галилей придумал в Венеции, наблюдая как движется вода в лодке при ее ускорении и замедлении. «Это явление установлено бесспорно, легко понятно и может быть проверено на опыте в любое время». Все прочие объяснения делают систему Коперника очень правдоподобной, но окончательное доказательство движения Земли можно обнаружить лишь на самой Земле! Будущее показало, что главный козырь Галилея был ошибочным, но выяснилось это много позднее. Галилей в самом центре римских интриг: «Нахожусь я в Риме, где как погода постоянно меняется, так и в делах всегда царит неустойчивость».

Кончилось все тем, что 24 февраля комиссия из 11 богословов признала утверждение о движении Земли «по меньшей мере заблуждением в вере». Галилею это решение было сообщено генеральным комиссаром инквизиции в присутствии кардинала Беллармино. 5 марта конгрегация индекса «задержала» (но не запретила) книгу Коперника. Этот акт был почти символическим. Из книги собирались изъять несколько фраз о том, что излагаемая доктрина не противоречит писанию, да исправить те места, где Коперник называет Землю светилом (светила — это Солнце и Луна!). Тосканский посол в письме на родину жалуется на настойчивость Галилея, но выражает надежду, что Галилей не пострадает. Распространились слухи, что от Галилея потребовали клятвенного отречения, и Галилей получил от Беллармино удостоверение, опровергавшее эти слухи: «Ему лишь было объявлено решение, вынесенное нашим владыкой и обнародованное святой конгрегацией индекса, в котором говорится, что доктрина, приписываемая Копернику, что Земля движется вокруг Солнца и что Солнце находится в центре мира, не двигаясь с востока на запад, противна священному писанию, и поэтому ее нельзя ни защищать, ни держаться». Это было в мае перед отъездом из Рима, а еще ранее Галилей был принят папой Павлом V. То, что произошло, еще не было осуждением, но было грозным предупреждением. Нарушение ясно выраженного запрета — несомненное преступление.

В ОЖИДАНИИ ПЕРЕМЕН. Галилей покидает Рим, он подчиняется «спасительному декрету». Но не слишком ли демонстративной выглядит его покорность. Вот, например, что он пишет, посылая свою работу «Приливы и отливы» эрц-герцогу Австрии Леопольду, брату тосканской герцогини: «Ныне, зная, что следует слушаться и

верить постановлениям начальственных лиц как проистекающим от более возвышенных знаний, до коих мой низкий ум сам по себе не поднимается, я рассматриваю это посылаемое Вам сочинение, имеющее в основе мысль о движении Земли, т. е. один из физических аргументов, которые я приводил в доказательство этого движения. Я рассматриваю это, повторяю, как поэтический вымысел или сновидение...» Трудно поверить, что этот человек никогда не будет говорить о движении Земли. Но для возвращения к этой теме Галилею нужны не новые аргументы, а изменение житейской ситуации. И он дождался изменений. Умер папа Павел V, влиятельным секретарем нового папы Григория XV стал Чамполи, благоволивший к Галилею, в 1621 г. не стало страшного кардинала Беллармино, а в 1623 г. папой под именем Урбана VIII стал кардинал Маттео Барберини, образованный человек, покровитель наук, не скрывавший своего восхищения Галилеем.

В это время Галилей заметно активизируется. В 1623 г. выходит его книга «Пробирные весы» — ответ астроному Римской коллегии Грасси, посвященный кометам. Здесь еще не идет прямо речь о движении Земли. Но следующая книга «Послание к Инголи», написанная в 1624 г., имеет к этому вопросу прямое отношение. Книга была ответом на направленное против системы Коперника сочинение Франческо Инголи, высокообразованного клирика, вышедшее в 1616 г. Знаменательно, что Галилей ждал с ответом 8 лет. В небольшом по объему «Послании» много ярких и смелых страниц. Здесь и поэтическое описание обстановки на корабле, не позволяющей обнаружить его движение,— замечательное пояснение закона инерции; здесь и рассуждения о неподвижных звездах, которые сравниваются с Солнцем; здесь и свободное обсуждение проблемы размеров Вселенной.

Что касается последнего, то здесь нет и намека на мир, ограниченный «восьмым небом» неподвижных звезд. Галилей четко объясняет, что не видит аргументов, позволяющих выбрать между гипотезами о конечной или бесконечной Вселенной, но вполне допускает, что человеку доступна лишь небольшая ее часть: «...мне вовсе не претит мысль о том, что мир, границы которому положены нашими внешними чувствами, может оказаться столь же малым по отношению к Вселенной, как мир червей по отношению к нашему миру». Очень смело допускает Га-

лилей предположение о бесконечности Вселенной! Можно вспомнить, как неуютно почувствовал себя великий фантазер Кеплер, предположив, что существует бесконечное число миров, подобных солнечной системе (в «Разговоре со звездным вестником»): «...мне пришлось бы обречь себя на оковы, на темницу в бесчисленных мирах Бруно и даже, более того, на изгнание в эту бесконечность».

«Послание к Инголи» было написано осенью 1624 г., а весной 1625 г. Галилей вновь посетил Рим. Разумеется, его целью было установить контакты с новым папой, оценить насколько благоприятной стала обстановка. Галилей шесть раз беседовал с папой, был обласкан всей многочисленной семьей Барберини, установил благоприятные контакты с рядом кардиналов, включая влиятельного немецкого кардинала Цоллерна. Отношение лично к Галилею не могло быть лучшим, но главная надежда не оправдалась: Урбан VIII твердо поддержал утверждение «спасительного декрета» о движении Солнца и неподвижности Земли. Галилей обнаружил, что в обсуждении этого вопроса они с папой разговаривают на разных языках. Галилей утверждает, что невозможно объяснить приливы и отливы иначе, как предположив движение Земли, но получает разъяснение, что то, что неизвестно людям, может быть известно богу. С такими аргументами спорить трудно! Галилей возвращается, а вслед ему тосканскому герцогу Фердинандо (Козимо недавно умер) отправляется послание папы с выражением удовлетворения визитом флорентийского ученого, самыми хвалебными отзывами о нем.

«СИСТЕМА МИРА». Вернувшись из Рима, Галилей решает, наконец, написать книгу с изложением всех аргументов в пользу системы Коперника. Об этой книге он мечтал в 1597 г., когда писал Кеплеру, ее он обещал в «Звездном вестнике», создание такой книги он считал главным делом при переезде во Флоренцию. Галилею исполнилось 60 лет, здоровье оставляло желать лучшего. Поездка в Рим не была полным успехом, но ожидать лучшего момента не приходилось. Разумеется, после «спасительного декрета», которого, как выяснилось, твердо придерживаются «начальственные лица» в Риме по сей день, нельзя было думать об открытой поддержке гелиоцентрической системы, но Галилею не привыкать хитрить.

Даже на богословских диспутах позволяли одному из участников «условно» защищать еретическую точку зре-

ния с тем, чтобы более выпукло ее разоблачить. Система Коперника не была объявлена ересью, и даже Беллармино позволял говорить о ней «предположительно» как о математическом построении. Галилей придумывает художественный прием. Трое собеседников Сальвиати, Сагредо и Симпличио соберутся во дворце Сагредо и будут в течение шести дней «беспристрастно» обсуждать каждую из двух систем мира. Первые два героя носят имена умерших друзей Галилея, третье имя — сторонника Аристотеля и Птолемея — вымышленно.

Более пяти лет напряженно работает Галилей над книгой; он, безусловно, воспринимает ее как главный труд своей жизни. К 1630 г. закончены четыре дня из шести: в первый день обсуждается принципиальная возможность движения Земли, во второй — ее суточное движение, в третий — годовое движение и, наконец, в четвертый — приливы и отливы — самая любимая находка Галилея. Он решает ограничиться четырьмя днями, назвать книгу «Диалогом о приливах и отливах». Весной 1630 г. Галилей везет рукопись в Рим.

Надо сказать, что созданная Галилеем книга, пользуясь современной терминологией, должна быть отнесена к разряду научно-популярных. Галилей сознательно адресует ее широкой публике, а не только ученым; он хочет всех убедить в существовании неопровержимых аргументов в пользу Коперника. Отчасти в связи с этим, отчасти из-за своих научных вкусов Галилей почти исключительно оперирует с качественными явлениями, не увязывая системы с численными данными астрономических наблюдений. Планеты у него движутся равномерно по окружностям с центром в Солнце, что́ не было никакой возможности согласовать с данными наблюдений. В этом отношении Галилей значительно уступает Кеплеру и уходит от обсуждения проблем, которые волновали Коперника. По-видимому, вычислительная астрономия не была сильной стороной Галилея.

Галилей получает аудиенцию у папы, встречается с влиятельными кардиналами. Урбан VIII не против книги, в которой будут содержаться условные аргументы в пользу осужденной системы, но не должно создаваться ощущения, что читателю предоставляется выбор между двумя системами. Книга должна содержать недвусмысленные указания на окончательность утверждения о движении Солнца и неподвижности Земли, освященного цер-

ковью. Кроме того, папа бракует название «Диалог о приливах и отливах». Галилей обещает выполнить пожелания в еще ненаписанных введении и заключении. Рукопись была передана Магистру Святого дворца (главному цензору) Никколо Риккарди (известному под именем отец Мостро) для вынесения суждения. Отец Мостро выбирает выжидательную тактику, он в отличие от Галилея не торопится.

Дальнейшее напоминает детективную историю, в которой Галилей и его благожелатели проявили чудеса изобретательности с тем, чтобы книга увидела свет. Уже для получения предварительного согласия, по-видимому, Чамполи, бывший секретарем папы, пошел на обман, рискуя карьерой. Книгу полагалось печатать в Риме. С огромными хитростями, со ссылками на здоровье Галилея, чуму в Италии и т. д. ее напечатали во Флоренции.

22 февраля 1632 г. герцог Фердинандо получил в подарок первый экземпляр посвященной ему книги «Диалог Галилео Галилея Академии Линчеи, Экстраординарного Математика Пизанского Университета и Главного Философа и Математика Светлейшего Великого Герцога Тосканского, где в четырех дневных беседах ведется обсуждение двух Основных Систем Мира Птолемеевской и Коперниковой и предлагаются неокончательные философские и физические аргументы как с одной, так и с другой стороны». В предисловии, адресованном «благоразумному читателю», объясняются мотивы, по которым автор приводит аргументы в пользу системы Коперника. Он вспоминает «спасительный эдикт, который для прекращения опасных споров нашего времени своевременно наложил запрет на пифагорейское мнение о подвижности Земли».

Галилея «волнуют» распространяющиеся слухи, «что этот декрет был издан не на основании надлежащего рассмотрения вопроса, а под влиянием страстей и людьми мало осведомленными». Эти-то слухи и должна опровергнуть предлагаемая книга. Он хочет показать «чужеземным народам, что в Италии вообще и в Риме в особенности знают по этому предмету не менее того, что могут знать исследователи за границей... и собрав воедино все собственные наблюдения, относящиеся к системе Коперника, заявить, что знакомство с ними предшествовало постановлению римской цензуры и что от последней исходят не только догмы для спасения души, но также и

остроумные открытия, удовлетворяющие разум». Наконец, «если мы принимаем неподвижность Земли и признаем противоположное мнение математическим парадоксом, то основой нашего убеждения является не неведение того, что думают другие, а иные соображения и мотивы — благочестие, религия, сознание всемогущества божия и признание несовершенства человеческого разума». Ну что же, цели должны были показаться в Риме достойными: пресечь разговоры о необдуманности эдикта, поставить на место «чужеземные народы». Впрочем некоторые формулировки сегодня кажутся двусмысленными. Возможно, они показались таковыми и кому-то из «начальственных лиц». По крайней мере, вскоре после того, как экземпляры «Диалога» оказались в Риме, разразился гром.

ПРОЦЕСС И ОТРЕЧЕНИЕ. По-видимому, инициатива в преследовании Галилея принадлежала самому Урбану VIII. Что так рассердило папу и сделало его непримиримым? Быть может, он счел неискренними похвалы «своевременности спасительного эдикта?» Несомненно, что «Диалог» появился в очень тяжелое для Урбана время. Сильная испанская оппозиция в Риме добивалась смещения папы и он мог вполне опасаться быть обвиненным в поддержке учения, «заподозренного в ереси». Поговаривали, что папа узнал себя в простаке Симпличио, защищавшем неподвижность Земли. Галилей пишет во введении, что этот герой, в отличие от двух других, не назван его собственным именем. О чем должен был подумать Урбан, если действительно обнаружил в разглагольствованиях Симпличио соображения, когда-то высказанные Галилею?

В августе 1632 г. папская курия запрещает распространение «Диалога». В сентябре дело передается в инквизицию. Начинается длительная игра. Благожелатели Галилея, включая тосканского герцога, вначале пытаются избежать рассмотрения дела в инквизиции, затем перенести рассмотрение во Флоренцию и, наконец, по возможности оттянуть разбирательство, ссылаясь на болезнь Галилея. Все эти попытки окончились безрезультатно — Урбан VIII был неумолим.

Угроза быть доставленным в оковах заставила Галилея в январе 1633 г. отправиться в Рим, 13 февраля он в Риме, а 12 апреля предстает перед генеральным комиссарием инквизиции Макулано. Начинается мучительное разбирательство, на Галилея оказывается давление, по-

видимому, ему предъявляли орудия пытки. Шла изматывающая борьба в поисках компромисса. Три квалификатора Святой службы дали заключения, что книга, по крайней мере, нарушает запрет держаться осужденной доктрины и распространять ее. Галилей признает, что против своего желания усилил аргументы в пользу системы Коперника. 22 июня в церкви святой Марии-над-Минервой коленопреклоненный Галилей, которому через полгода должно было исполниться 70 лет, выслушивает приговор. За то, что он «считал, будто можно держаться и защищать в качестве правдоподобного мнение после того, как оно было объявлено и определено как противное священному писанию», Галилей объявлялся «сильно заподозренным в ереси», книга «Диалог» запрещалась, Галилей приговаривался к заключению в Святой службе (заподозренного в ереси не сжигали как еретика!) и он должен «три года единожды в неделю читать семь покаянных псалмов». Затем Галилей зачитывает текст отречения: «...после того как мне было объявлено, что названная доктрина противоречит священному писанию, я написал и напечатал книгу, в которой трактую об этой самой доктрине, осужденной в прошлом, и с большой убедительностью привожу аргументы в ее пользу, не давая никакого решения...» Он клянется «исполнить и блюсти все эпитимьи», на него наложенные.

Может быть, в этот момент Галилей пожалел, что покинул Венецианскую республику, где он был недосягаем для инквизиции, переоценив возможности тосканского герцога. Но в Венеции у него, по-видимому, не было шансов издать свой главный труд, что, несмотря на страшные последствия, ему удалось во Флоренции.

Заключение в тюрьме инквизиции было заменено ссылкой, вначале в римский дворец Медичи; через две недели его отправили в Сиенну к архиепископу Пикколамини. Еще через полгода ему разрешили перебраться в его виллу Арчетри, невдалеке от монастыря, где находились его дочери. Там и прожил Галилей восемь оставшихся ему лет, лишь ненадолго выехав во Флоренцию. Повсюду Галилей находился под неусыпным оком инквизиции, которая тщательно контролировала его связи с внешним миром. Урбан VIII не проявил милосердия к опальному ученому даже в день его кончины. Его родственник кардинал Барберини передает во Флоренцию: «...нехорошо строить мавзолей для трупа того, кто был

наказан трибуналом святой инквизиции и умер, отбывая это наказание». Герцогу пришлось отказаться от желания похоронить Галилея рядом с Микеланджело (это желание было исполнено через много лет).

Отречение Галилея не перестает волновать людей и сегодня. Имел ли право ученый отречься от теории, которую считал несомненной истиной и утверждению которой отдал значительную часть своей жизни? Предлагались разные объяснения принятого Галилеем решения: страх 70-летнего больного ученого перед пыткой и сожжением, ощущение, что он выполнил свою миссию и ничто уже не может помешать распространению книги, возможность сохранить оставшиеся годы (их оказалось восемь) для занятий наукой (он вернулся к занятиям, которые прервал на четверть века, ради разработки идей, от которых теперь должен был отречься). В книге К. Рид «Гильберт» рассказывается, что великий математик с присущей ему непосредственностью говорил о Галилее: «Но он же не был идиотом. Только идиот может считать, что научная истина требует мученичества. Быть может, так обстоит дело в религии, но научные результаты доказывают себя с течением времени». Следует иметь в виду, что Галилей и раньше шел на компромиссы и уже после 1616 г. формально признавал неподвижность Земли (в том числе и в «Диалоге»).

Легендарной фразы «А все-таки она вертится!» — Галилей, по-видимому, не говорил, но несмотря на его несомненную религиозность его отречение не могло быть искренним. Его не могло не радовать, что «Диалог» не удалось изъять полностью и что в 1635 г. в Европе появился перевод на латинский язык. Его венецианский знакомый Миканцио пишет ему: «Примечательная вещь — после выхода в свет вашего «Диалога» люди, знающие математику, тут же перешли на сторону Коперниковой системы. Вот к чему привели запреты!» Галилей отвечает: «То, что Вы писали мне относительно «Диалога», в высшей степени для меня неприятно, поскольку это может причинить великое волнение начальственным лицам. Ведь выдача разрешения читать «Диалог» столь ограничена, что их святейшество сохраняет его лишь единственно для себя самого, дабы в конце концов, что вполне может случиться, об этой книге совершенно забыли».

Очень тяжел был для Галилея позор, связанный с процессом и приговором, но тяжел был и запрет продолжать

работу над проблемами мироздания. У него не было сомнений, что от этих занятий он должен отказаться. Что же оставалось Галилею? У него есть все основания жаловаться на эпоху: «Несчастная наша эпоха, ныне царит твердая решимость искоренять всякую новую мысль, особенно в науках, как будто бы уже познано все, что можно познать!» Можно утешаться предсказаниями его старого единомышленника Кампанеллы (еще в 1616 г. в неаполитанской тюрьме написавшего «Апологию Галилея»): «Грядущий век рассудит нас, ибо современность всегда распинает своих благодетелей, но они потом воскресают на третий день или на третье столетие».

Через несколько недель после приговора Галилей вспоминает о прерванном на полуслове трактате по механике и на ближайшие годы написание этой книги становится главным делом Галилея, целью его жизни. Он вспоминает об открытом им в юности изохронном свойстве маятника и поручает сыну Винченцо сконструировать маятниковые часы. Галилей неумолимо слеп. К окончанию работы над книгой он уже потерял зрение на один глаз и все же он временами наблюдал небо в телескоп, описал либрацию Луны, пока в конце 1637 г. не ослеп окончательно: «...то небо, тот мир и та Вселенная, которую я своими поразительными наблюдениями и ясными доказательствами расширил в сотни и тысячи раз по сравнению с тем, как обычно видели ее мудрецы всех прошлых веков, ныне для меня так уменьшилась и сузилась, что стала не больше того пространства, которое занимает моя персона. Из-за недавности случившегося я еще не могу относиться к несчастью с терпением и покорностью, однако течение времени должно будет меня к этому приучить». И все-таки в последний дарованный ему год он опять наблюдал Медичейские звезды, а его старые друзья навели его на мысль, которая завладела им в его последние дни.

ОПЯТЬ МЕДИЧЕЙСКИЕ ЗВЕЗДЫ. Возможно, эта идея появилась у Галилея еще раньше, в конце 1635 г., когда он давал для Французской комиссии, созданной кардиналом Ришелье, отзыв на метод Морена определения долготы местности по наблюдениям над движением Луны. Метод оказался несостоятельным, но следует обратить внимание, сколь высокопоставленная особа была в нем заинтересована. А дело в том, что задача определения долготы на борту корабля в XVII веке — веке мореплавания — была одной из самых актуальных. Сегодня

трудно поверить, что в то время моряки совершали дальние плавания, не имея сколь-нибудь надежного способа измерять координаты корабля в открытом море. Это, конечно, не касалось широты: ее умели надежно измерять, по крайней мере, в XVI веке (например, по высоте Солнца в полдень). А что касается долготы, то ученые ничего реального предложить не могли. Проблема эта все больше волновала морские державы по соображениям сугубо экономическим. Автор метода измерения долготы с приемлемой точностью (скажем, до $^1/_2$ градуса) мог в разное время получить 100 000 экю от Филиппа II Испанского или 100 000 ливров от Людовика XIV или 20 000 фунтов от английского парламента или 100 000 флоринов от Генеральных Штатов Голландии. Меньшая точность пропорционально уменьшала премию. Эти цифры достаточно выразительно свидетельствуют об интересе к проблеме.

Идея измерения долготы восходит еще к Гиппарху (II век до н. э.): надо воспользоваться тем, что разность долгот в двух пунктах земного шара пропорциональна разности местных времен в этих пунктах. Так, в пунктах, у которых долготы отличаются скажем на 15°, разница в местном времени равна 1 часу ($360°/24 = 15°$). Поэтому задачу можно свести к измерению местного времени на корабле и соответствующего времени в какой-нибудь фиксированной точке, например, в порту отплытия. Местное время в пункте нахождения корабля измерить реально, но как помнить время в порту отплытия? Долго никто и не помышлял о его «сохранении». Прекрасный пример — история о сутках, «потерянных» во время кругосветного плавания Магеллана! Да и не было часов, которые могли бы это время помнить, особенно в условиях морской качки.

Другая возможность — воспользоваться какими-нибудь астрономическими явлениями, которые можно наблюдать на борту корабля и точное время наступления которых в порту отплытия известны. Но как мало подходящих явлений! Что можно предложить сверх солнечных и лунных затмений, которые происходят слишком редко. Таблицы для движения Луны были столь несовершенны, что не позволяли определять долготу за счет повседневных наблюдений за Луной (примером такой попытки и был метод Морена). Галилей описывает ситуацию с присущей ему торжественностью: «По прежним временам небо было на этот счет щедро, но по нынешним нуждам

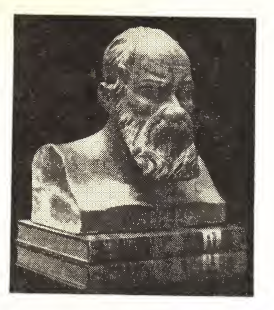
оно изрядно скупо, помогая нам только лунными затмениями: и не потому, что то же самое небо не изобилует явлениями частыми, заметными и куда более подходящими для наших нужд, чем лунные и солнечные затмения, но правителю мира угодно было скрывать их вплоть до наших дней...» Оптимизм, который чувствуется в последних словах Галилея, связан с надеждами, которые он возлагал на открытые им Медичейские звезды — спутники Юпитера. Дело в том, что одна из их особенностей, открытых еще во время первых наблюдений 1610 г.,— частные затмения. Если бы не наклон лунной орбиты к земной, Луна попадала бы в конус тени, отбрасываемой Землей, каждое полнолуние. Спутники Юпитера попадают в мощный конус его тени при каждом обороте, а вращаются они довольно быстро (Ио совершает полный оборот примерно за 42,5 земных часа). На наблюдении затмений спутников Юпитера и решает Галилей построить свой способ измерения долготы на борту корабля.

Он начинает переговоры, не дожидаясь окончательной разработки метода. Первоначально Галилей думал об Испании (вероятно, было важно, что это традиционная католическая страна), о встрече с вице-королем в Неаполе, но постепенно переориентировался на Голландию, где его идея вызвала больший интерес. В 1636 г. секретные переговоры с Генеральными Штатами в самом разгаре, в августе принимается решение запросить у Галилея необходимые материалы для рассмотрения. Галилей пишет торжественное обращение к Генеральным Штатам Голландии как к «покорителям и властителям океана». Приведенная выше цитата была взята из этого обращения. Галилей считает символичным, что телескоп, который играет первостепенную роль в его методе, был изобретен в Голландии. Он не скупится на описание преимуществ, которые получит Голландия, воспользовавшись его методом: «Я мог бы назвать множество искусств, но достаточно ограничиться кораблевождением, доведенным вашими же голландцами до столь поразительного совершенства, и если единственное оставшееся дело — определение долготы, которое, видим, пока им не дается,— благодаря их последнему и величайшему изобретению присоединится к списку остальных остроумных операций, то слава их достигает такого предела, превзойти который никакая другая нация не сможет и мечтать».

Была образована авторитетная комиссия, в которую вошли адмирал Лауренс Реаль, астроном и математик Гортензий, а позднее и член Государственного Совета Константин Гюйгенс (отец великого ученого). Практичным голландцам нелегко было поверить в реалистичность предлагаемого метода. «Представляете ли Вы себе, скольким людям высокого положения и власть имущим мы были вынуждены проповедовать неведомую дотоле истину, принятую вначале за безумие»,— сетовал К. Гюйгенс. Впрочем и сами благожелательные члены комиссии не были уверены в возможности практически реализовать проект. Адмирал Реаль в письме Галилею опасается, что его метод может оказаться слишком тонок «для такого грубого народа как голландские моряки». Сомнения можно почувствовать и в словах К. Гюйгенса: «Наши народы с трудом сочтут себя обязанными за широкий дар, более прекрасный, чем выгодный». Даже Гортензию с трудом удается наладить наблюдения над спутниками Юпитера. Не хватает хороших телескопов. Галилей посылает в конце 1637 г. свой телескоп, который уже не может ему понадобиться из-за слепоты. Для наблюдения спутников необходимы таблицы, которые составить непросто (даже определение периодов обращения спутников долго не удавалось).

Вычислительная астрономия никогда не была сильной стороной Галилея, а теперь слепота к тому же лишила его возможности проводить наблюдения. Галилей просит монаха-оливетанца Винченцо Реньери, опытного астронома-вычислителя, найти эфемериды спутников Юпитера, по возможности на год вперед. Вычисления затягивались, и Реньери так и не удалось составить необходимые таблицы.

Генеральные Штаты поручают Гортензию встретиться с Галилеем, чтобы уточнить необходимые детали и вручить золотую цепь — подарок Генеральных Штатов. Тем временем в переговоры вмешалась инквизиция. Началась сложная игра, в результате которой Галилей то ли сам счел за благо отказаться от встречи с Гортензием и от голландского подарка, то ли получил прямой запрет инквизиции. Начались разговоры о сохранении приоритета за Италией. Кастелли, которому давно отказывали в свидании с учителем, даже получил разрешение встретиться с Галилеем и выяснить подробности метода. Неожиданно умерли Гортензий и Реаль. Силы покидали Гали-



лея. Флорентийский инквизитор доносил в Рим, что ученый, «совершенно ослепший, скорее уже лежит в гробу, чем занимается математическими построениями». Надежды не покидали Галилея, но становилось ясно, что ему не доведется увидеть осуществление своего замысла. Вероятно, и в самом деле практическая реализация проекта была невозможна. Прошло еще много времени, прежде чем проблема измерения долготы в море была, наконец, решена, но на совсем другом пути — при помощи точных морских часов.

Одно из последних высказываний Галилея показывает, что его никогда не оставляли мысли о главной проблеме его жизни, свидетельствует о его «неисправимости»: «И так же, как я считаю недостаточными наблюдения и предположения Коперника, я полагаю, что еще более ложны и ошибочны наблюдения и предположения Птолемея, Аристотеля и их последователей, поскольку несостоятельность последних можно достаточно ясно выявить, пользуясь обычной речью». Ему не позволено спорить с тем, что могут существовать аргументы, не доступные человеку и опровергающие Коперника, но для опровержения Птолемея хватает аргументов, человеку доступных.

ЭПИЛОГ. По прошествии трех с половиной веков многое видится не так, как это представлялось Галилею. Это относится и к различию между системами Птолемея и Коперника, и к вопросу об «истинном» движении Земли.

Трудно строить последовательную систему мира, реально не опираясь на небесную механику. Парадокс заключался в том, что небесная механика Галилея в отличие от его «земной» механики была еще достаточно наивной и близкой к взглядам Аристотеля. Во-первых, он считал, что небесные тела движутся по инерции, не испытывая постоянно действующих сил. Для него не было приемлемым предположение о дальнодействии, и, например, предположение о солнечном или лунном притяжении для земных объектов воспринималось как астрологический анахронизм. Во-вторых, по Галилею, небесные тела, двигаясь по инерции, совершают равномерные вращательные движения. Противоречие с «земным» принципом инерции налицо!

Главным вопросом для Галилея был вопрос об истинном (абсолютном) движении Земли, об его экспериментальном доказательстве. Поскольку доказательством должны служить земные явления, столкновение земного и небесного принципов инерции неминуемо. С величайшей проницательностью опровергает Галилей утверждение Тихо Браге, повторенное Инголи, что на движущемся корабле ряд явлений должен обнаружить это движение. Скорее всего это опровержение Галилея (которое по существу и явилось первой формулировкой закона инерции («земной»)) основывалось на эксперименте. Одновременно Галилей утверждает, что существуют явления, обнаруживающие движение Земли (приливы и отливы). При этом не выявляется, чем гипотетическое движение Земли отличается от движения корабля, которое нельзя обнаружить внутренним образом.

Подчеркнем, что эти явления должны были быть следствием собственного движения Земли, происходящего по инерции без участия дальнодействующих сил. Галилей не видит здесь противоречия. Как уже отмечалось, «решающий» аргумент Галилея оказался совершенно ошибочным.

Взгляд Галилея на истинное (абсолютное) движение не был корректным. Творец закона инерции был еще далек от понимания относительного характера движения,

о роли системы отсчета при рассмотрении движения. Многое для выяснения относительного характера движения сделал Гюйгенс. Ньютон (в отличие от Гюйгенса) считал вращение абсолютным. В системах Птолемея и Коперника фигурируют разные системы отсчета: в одной покоится Земля, в другой — Солнце. Развитие механики показало, что удачно выбранная система необходима для выявления закономерностей движения. Главное достоинство системы Коперника — в возможности выявить законы Кеплера (которые, кстати, Галилей не принял). Дело в том, что в системе Коперника неподвижное начало помещается в самое массивное тело и при рассмотрении отдельной планеты в первом приближении можно ограничиться взаимодействием этой планеты с Солнцем (пренебрегая взаимодействием с другими планетами). Возникает задача двух тел, и законы Кеплера, как показал Ньютон, непосредственно следуют из его закона всемирного тяготения. В системе отсчета, в которой неподвижна Земля, описание движения усложняется, и, в частности, законы Кеплера для нее не имеют места.

Что касается астрономических наблюдений Галилея, то они открыли новую эру в астрономии. Особую роль сыграли при этом спутники Юпитера. Более полувека ушло на вычисление их периодов, которое пытался провести и сам Галилей, и опытные в вычислениях астрономы Римской коллегии. Еще более трудным было вычисление их расстояний до Юпитера из-за недостаточно развитой микрометрической техники. Но когда в 1685 г. Ньютон создавал свою книгу «О системе мира», вошедшую в «Математические начала натуральной философии», он уже имел возможность констатировать, что для спутников Юпитера имеет место третий закон Кеплера $T^2 \sim R^3$ (T — периоды обращения, R — расстояния до Юпитера), хотя данные измерений требовали некоторых уточнений. Этим фактом открывался раздел «Явления», где перечислялись экспериментальные факты, на которые опирается ньютоновская «система мира».

Построение теории движения спутников Юпитера на основе закона всемирного тяготения долго испытывало честолюбие классиков небесной механики. Дело в том, что достаточно точная теория должна учитывать не только притяжение Юпитера, но и Солнца и взаимное притяжение спутников. В 1774 г. эта задача фигурирует в качестве темы на премию Французской Академии наук.

Весьма точная теория была построена Лапласом в 1789 г. Медичейские звезды долго оставались объектом, мимо изучения которого не мог пройти ни один великий астроном. А они дарили ученых все новыми удивительными фактами. Так, например, Лаплас установил, что время обращения первого спутника плюс удвоенное время обращения третьего равно утроенному времени обращения второго. Но несомненно самая замечательная страница в изучении спутников Юпитера — открытие Олафа Ремера, о котором мы расскажем более подробно.

Добавление

ДОГАДКА ОЛАФА РЕМЕРА

НАБЛЮДЕНИЯ КАССИНИ. Постепенно телескоп становится признанным инструментом астронома. Растут размеры телескопов: телескоп Гюйгенса давал 92-кратное увеличение, а в 1670 г. в Париже появился телескоп, дававший увеличение в 150 раз. Характерно, что этот телескоп уже не был в распоряжении одного ученого: он был установлен в научном учреждении нового типа — обсерватории. Парижской Обсерваторией, находившейся под покровительством Людовика XIV, руководил Жан Доминик Кассини (1625—1712) — астроном, приехавший из Италии. Астрономия очень многим обязана Кассини. Он обнаружил, что у Сатурна, кроме одного спутника (Титана), открытого Гюйгенсом, имеется еще четыре, а открытое тем же Гюйгенсом кольцо Сатурна оказалось при более тщательных наблюдениях Кассини состоящим из двух колец, разделенных щелью, которую стали называть щелью Кассини. Кассини доказал осевое вращение Юпитера и Сатурна. Велики заслуги Кассини и в астрономических вычислениях: он с невиданной до тех пор точностью измерил астрономическую единицу — расстояние от Земли до Солнца. Интересно сопоставить полученное Кассини значение 146 млн. км с истинным значением 149,6 млн. км и величиной 8 млн. км, которая принималась прежде.

Как уже отмечалось, одной из центральных задач астрономии второй половины XVII века стало вычисление периодов обращения спутников Юпитера. Эти величины можно получить путем нехитрых вычислений, если точно известны последовательные моменты их затмений. Зная же периоды обращения спутников, можно, напротив, предсказывать моменты их затмений. В 1672 г. Кассини очень

тщательно фиксирует моменты затмения Ио (спутника Юпитера). Он с удивлением обнаружил, что получаемые им значения для периода обращения Ио несколько различаются от случая к случаю, как если бы иногда затмение несколько запаздывало, а иногда наступало несколько раньше. Наибольшая разница между полученными значениями, составлявшая 22 минуты (при времени обращения 42,5 часа), не могла быть объяснена точностью измерений. По-видимому, Кассини уже имел возможность пользоваться маятниковыми часами Гюйгенса, которые начинали использоваться для астрономических наблюдений. Наблюденный эффект не находил разумного объяснения.

В 1672 г. — в год, когда Кассини систематически наблюдал за спутниками Юпитера,— в Парижской обсерватории появился молодой датский ученый Олаф Ремер (1644—1710). Его заинтриговало поразительное совпадение (возможно, на него обратил внимание Кассини). Наибольшее запаздывание затмений Ио приходилось на те моменты времени, когда Юпитер находился дальше всего от Земли. Обратить внимание на такое совпадение можно было благодаря случаю, но какая нужна была прозорливость, чтобы не объявить его с порога случайностью! Хотя во времена Людовика XIV в астрономических атласах Земля все еще изображалась в центре мироздания, ученые уже не были готовы объяснять изменение обращения спутника Юпитера влиянием Земли! Впрочем, конкурирующее объяснение этого эффекта, предложенное Ремером, должно было казаться не менее фантастическим. Ремер предположил, что мы наблюдаем затмение Ио с некоторым запаздыванием из-за того, что свету приходится пройти большее расстояние, когда расстояние между Землей и Юпитером увеличилось. Чтобы оценить эту гипотезу Ремера, нам надо вспомнить, что думали о скорости света его современники.

ОТСТУПЛЕНИЕ О СКОРОСТИ СВЕТА. Ученые древности считали, что свет распространяется мгновенно (возможно, единственным исключением был Эмпедокл). Это мнение на много веков было закреплено авторитетом Аристотеля. На Востоке Авиценна и Альхазем допускали, что скорость света конечна, но очень велика. Среди европейских ученых нового времени Галилей был одним из первых, готовых допустить конечность скорости света. В его «Беседах» трое собеседников Сагредо, Симпличио и Сальвиати обсуждают проблему скорости света. Сагредо под-

нимает этот вопрос, Симпличио считает, что она бесконечна, поскольку мы видим пламя выстрела «без потери времени», тогда как звук доходит через заметное время, что для Сагредо означает лишь, что звук распространяется значительно медленнее, чем свет. В ответ на это Сальвиати, представляющий в этом триумвирате интересы Галилея, предлагает опыт с двумя наблюдателями, снабженными фонарями, причем каждый открывает свой фонарь, увидев свет другого. Однако этот опыт, который в самом деле пытались провести ученые Флорентийской академии, не дает реальной возможности убедиться в конечности скорости света. (У Эйнштейна и Инфельда отмечается, что для этого надо было бы уметь фиксировать промежутки времени порядка 1/100 000 с.) Кеплер считал, что свет распространяется мгновенно; Роберт Гук думал, что скорость света конечна, но столь велика, что ее измерение невозможно. Декарт и Ферма считали скорость света бесконечной, что сильно осложнило их исследования по геометрической оптике. Декарт, с одной стороны, считал, что свет распространяется мгновенно, с другой стороны, разлагал его «скорость» на составляющие. Ферма, формулируя свой знаменитый принцип, который сегодня называется принципом наименьшего времени, чтобы не говорить о скорости света, прибегал к всевозможным уловкам, говоря об «антипатии света к веществу», вводя формальный коэффициент, фактически равный отношению скоростей света. Таким образом, большинство современников Ремера не готово было признать конечность скорости света, не говоря уже о том, чтобы сделать ее ответственной за вполне ощутимые, хотя и проявляющиеся в астрономических масштабах, явления. Для сравнения заметим, что лишь недавно была измерена скорость звука.

ВЫЧИСЛЕНИЯ РЕМЕРА. Они предельно просты. Итак, он исходит из того, что 22 минуты — максимальное запаздывание начала затмения — как раз тот срок, который необходим свету, чтобы пройти расстояние, равное разности между наибольшим и наименьшим расстоянием между Землей и Юпитером. Эта разность равна удвоенному расстоянию между Землей и Солнцем. По сравнению с ним расстоянием от спутника до Юпитера можно пренебречь.

Мы видим, что у Ремера был еще один повод быть благодарным Кассини, от которого он знал достаточно точное

значение расстояния от Земли до Солнца (146 млн. км). Итак, по Ремеру, свету на преодоление 292 млн. км требуется 1320 с (22 мин). Откуда для скорости света получается значение 221 200 км/с. Ошибка у Ремера получилась из-за неточностей в значении астрономической единицы (правильно 149,6 млн. км), но, главное, из-за очень большой ошибки в определении максимального времени запаздывания (правильно — 16 мин 36 с). Для правильных значений получилось бы для скорости света значение 300 400 км/с, что очень близко к истинному значению. Все же поразительно, что Ремеру удалось дать правильное по порядку значение скорости света.

Эти вычисления были проведены Ремером в сентябре 1676 г. Чтобы убедить ученых в своей правоте, он придумывает трюк, достойный египетских жрецов. Он проводит вычисления и предсказывает, что в ноябре затмение Ио произойдет примерно с 10-минутным запозданием. Наблюдения, в которых участвовал Кассини, доказали, что Ремер правильно предсказал время с точностью до секунды. Однако это совпадение не произвело слишком сильного впечатления на окружающих. По крайней мере, он не убедил ученых из Парижской академии, среди которых преобладали картезианцы (сторонники Декарта). Ведь их учитель писал про астрономов, что «хотя их предположения всегда ошибочны и не достоверны, они делают весьма правильные заключения, опирающиеся на различные выполненные ими наблюдения». Ремера отказался поддержать даже Кассини! С такого рода явлениями нередко приходится встречаться в истории науки. Нашлись и сторонники Ремера, среди которых выделялся английский астроном Эдмонд Галлей (1656—1742).

Окончательное признание теории Ремера пришло, когда в 1728 г. Джеймс Брэдли (1693—1762) изучил видимое годичное движение звезд — аберрацию. Она нашла естественное объяснение как результат сложения скорости света, идущего от звезд, и скорости движения Земли по орбите. При этом получилось, что скорость света в 10 000 раз больше скорости движения Земли, что давало хорошее согласие с величиной, найденной Ремером. То, что два существенно различных пути приводили к одному ответу, убедило многих. Первое же измерение скорости света в результате «земного» эксперимента было сделано Арманом Физо в 1849 г.

Рассказывая сегодня об открытии Галилея, нельзя не вспомнить о том, что при помощи космических аппаратов «Вояджер-1», «Вояджер-2» удалось узнать, как устроена поверхность галилеевых спутников Юпитера. Заметим, что космический аппарат, который должен быть запущен в 1986 г. специально для изучения Юпитера, будет носить имя Галилея. Вот что пишет Дж. Эберхарт об увиденном учеными на переданных снимках: «Оказалось, что «галилеевы луны» вовсе не «коллекция скалистых шаров». Пожалуй, только испещренная кратерами поверхность Каллисто, самого дальнего из четырех спутников, подтвердила предположения ученых. На Ганимеде взорам исследователей открылась целая гамма тектонических разломов, искривлений и отрогов. Но совершенно ошеломили их два других спутника, более близких к планете,— Ио и Европа.

Ученые не могли поверить своим глазам — на снимках Ио они увидели разукрашенный в красное и золотое, серебряное и черное бурлящий мир, царство активных вулканов! А когда объективы «Вояджеров» были направлены на Европу, взорам наблюдателей предстала ледяная планета, светлая поверхность которой была словно исхлестана гигантской плетью...».

О ХРИСТИАНЕ ГЮЙГЕНСЕ, ЧАСАХ С МАЯТНИКОМ И КРИВОЙ, КОТОРУЮ «НЕ РАССМОТРЕЛИ ДРЕВНИЕ»

Мы рассказывали о том, как почти одновременно с началом XVII века Галилей заложил основы классической механики. Христиан Гюйгенс (1629—1695) был непосредственным преемником Галилея в науке. По словам Лагранжа, Гюйгенсу «было суждено усовершенствовать и развить важнейшие открытия Галилея». Существует рассказ о том, как в первый раз Гюйгенс соприкоснулся с идеями Галилея: 17-летний Гюйгенс собирался доказать, что брошенные горизонтально тела движутся по параболам, но обнаружил доказательство в книге Галилея и не захотел «писать «Илиаду» после Гомера». Поражает, насколько близок был Гюйгенсу научный дух Галилея, его научные интересы.

Иногда кажется, что это помолодевший Галилей вновь совершенствует свои зрительные трубы и продолжает свои астрономические наблюдения, прерванные сорок лет назад. Он пытается при помощи более сильного телескопа разгадать тайну Сатурна, казавшегося тремя соединенными звездами, и, наконец, наблюдая в 92-кратный телескоп (у Галилея был 20-кратный), обнаруживает, что за боковые звезды принималось кольцо Сатурна. Он вновь возвращается к проблеме, остро стоявшей в 1610 г.: существуют ли спутники у планет, отличных от Земли и Юпитера. Тогда Галилей писал Медичи, что у других планет спутников не обнаружилось и ни один царственный дом, кроме дома Медичи (в честь которого были названы спутники Юпитера), не может рассчитывать на «собственные» звезды. Гюйгенс открыл в 1655 г. Титан, спутник Сатурна. Вероятно, времена изменились и Гюйгенс не предлагал открытый им спутник кому-либо в подарок.

А потом Гюйгенс обратился к механике. И здесь его волнуют те же проблемы, что и Галилея. Он развивает его принцип инерции, утверждая, что не только иногда нельзя обнаружить движение внутренними средствами, но и само



Христиан Гюйгенс
(современная гравюра), 1629—1695.

утверждение о том, что тело движется, не имеет абсолютного значения. Гюйгенс воспринимал всякое движение как относительное, в чем серьезно расходился с Ньютоном. Когда-то Галилей, обдумывая, почему при вращении Земли тела удерживаются на ее поверхности, почти получил формулу для центростремительного ускорения, буквально не сделав последнего шага (см. с. 52). Гюйгенс дополнил рассуждения Галилея и получил одну из самых замечательных формул в механике.

Гюйгенс обращается к исследованию изохронного характера качений математического маятника. Вероятно, это было первое открытие Галилея в механике. И здесь Гюйгенсу представилась возможность дополнить Галилея: изохронность математического маятника (независимость периода колебаний маятника фиксированной длины от амплитуды размаха) оказалась справедливой лишь приближенно для малых углов размаха. Затем Гюйгенс ре-

лизует идею, которая занимала Галилея в его последние годы: он конструирует маятниковые часы.

Задачей о создании и совершенствовании часов, прежде всего маятниковых, Христиан Гюйгенс занимался почти сорок лет: с 1656 по 1693 г. А. Зоммерфельд назвал Гюйгенса «гениальнейшим часовым мастером всех времен». Один из основных мемуаров Гюйгенса, содержащих его результаты по математике и механике, вышел в 1673 г. под названием «Маятниковые часы или геометрические доказательства, относящиеся к движению маятников, приспособленных к часам». Многое придумал Гюйгенс, пытаясь решить одну из основных задач своей жизни — создать часы, которые можно было бы использовать в качестве морского хронометра; многое он продумал с точки зрения возможностей применения к этой задаче (циклоидальный маятник, теория развертки кривых, центробежные силы и т. д.). Мы расскажем здесь о занятиях Гюйгенса хронометрией, делая упор на те механические и математические задачи, которые сопутствовали им. Но прежде всего следует пояснить, почему задача о создании часов привлекала великого ученого.

Часы относятся к очень древним изобретениям человека. Вначале это были солнечные, водяные, песочные часы; в Средние века появились механические часы. В разные эпохи измерение времени играло разную роль в жизни человека. Немецкий историк О. Шпенглер, отмечая, что механические часы были изобретены в эпоху начала романского стиля и движения, приведшего к крестовым походам, пишет: «...днем и ночью с бесчисленных башен Западной Европы звучащий бой, этот жуткий символ уходящего времени, есть, пожалуй, самое мощное выражение того, на что вообще способно историческое мироощущение. Ничего подобного мы не найдем в равнодушных ко времени античных странах и городах. Водяные и солнечные часы были изобретены в Вавилоне и Египте, и только Платон, опять в конце Эллады, впервые ввел в Афинах клепсидру (разновидность водяных часов.— *С. Г.*), и еще позднее были заимствованы солнечные часы как несущественная принадлежность повседневного обихода, причем все это не оказало никакого влияния на античное мироощущение».

Характерно, что при первых шагах новой механики и математического анализа время не сразу заняло место основной переменной величины при описании движения

(Галилей в поисках закона свободного падения начал с гипотезы о пропорциональности скорости пути, а не времени).

Долгое время механические часы были громоздки и несовершенны. Было изобретено несколько способов преобразовать ускоренное падение груза в равномерное движение стрелок, и все же даже известные своей точностью астрономические часы Тихо Браге приходилось каждый день «подгонять» при помощи молотка. Не было известно ни одного механического явления, которое бы периодически повторялось через одно и то же сравнительно небольшое время.

МАЯТНИКОВЫЕ ЧАСЫ. Такое явление было обнаружено на заре создания новой механики Галилеем. Именно, Галилей обнаружил, что колебания маятника изохронны, т. е. их период, в частности, не меняется при затухании колебаний. Мы приводили выше рассказ Вивиани об этом открытии Галилея.

Галилей предполагал воспользоваться маятником для создания часов. В письме от 5 июня 1636 г. голландскому адмиралу Л. Реалю он писал о соединении маятника со счетчиком колебаний. Однако к созданию часов Галилей приступил в 1641 г., за год до смерти. Работа не была закончена. Ее должен был продолжить сын Галилея Винченцо, который долго медлил с возобновлением работ и приступил к ним лишь в 1649 г., также незадолго до смерти, так и не создав часов. Некоторые ученые уже пользовались изохронностью маятника в лабораторных экспериментах, но отсюда до создания маятниковых часов — нелегкий путь.

Его преодолел в 1657 г. 27-летний Христиан Гюйгенс, к тому времени уже известный ученый, открывший кольцо Сатурна. 12 января 1657 г. он писал: «На этих днях я нашел новую конструкцию часов, при помощи которой время измеряется так точно, что появляется немалая надежда на возможность измерения при ее помощи долготы, даже если придется везти их по морю». Первый экземпляр маятниковых часов изготовил гаагский часовщик Соломон Костер, а 16 июня Генеральные Штаты Голландии выдали патент, закреплявший авторство Гюйгенса. В 1658 г. вышла брошюра «Horologium» с описанием изобретения.

Узнав о часах Гюйгенса, ученики Галилея предприняли энергичную попытку восстановить приоритет учителя.

Для того чтобы правильно оценить ситуацию, важно понимать, что в XVII веке проблема создания точных часов воспринималась, в первую очередь, в связи с возможностью их использования для измерения долготы на борту корабля. Эту возможность понимал Галилей, ее же с самого начала выдвигал на первый план Гюйгенс (ср. приведенное выше высказывание).

Мы уже говорили выше о проблеме измерения долготы. Ученики Галилея знали, что в конце жизни он вел секретные переговоры с Генеральными Штатами, предлагая свой способ измерения долготы. Содержание переговоров, прерванных после вмешательства флорентийского инквизитора, не было достоверно известно. Можно было предположить, что речь в них шла и об использовании маятниковых часов. Напомним, что идея этого метода состоит в том, что часы «запоминают» время в порту отплытия, а разность этого времени с местным временем на корабле пересчитывается в разность долгот. Важно было, чтобы часы долго сохраняли правильный ход в условиях морской качки. Изохронность колебаний маятника должна была быть существенна как при затухании колебаний, так и при раскачке во время морского волнения.

Галилей предлагал Голландии другой способ измерения долготы, основанный на наблюдении затмений спутников Юпитера. Хотя упоминания о маятниковых часах могли фигурировать в переговорах (ср. упомянутое письмо Реалю), несомненно, конструкция часов или сколько-нибудь подробные сведения о них в Голландию не передавались. К тому времени, когда Галилей приступил к созданию часов (1641 г.), переговоры с Генеральными Штатами Голландии практически прервались.

Гюйгенса не обвиняли в плагиате, хотя, быть может, и настораживало, что маятниковые часы созданы в Голландии сыном влиятельного члена Государственного Совета, имевшего отношение к переговорам с Галилеем. Леопольд Медичи написал письмо французскому астроному И. Буйо, покровительствовавшему Гюйгенсу, и поручил изготовить ходовой механизм по модели Галилея. К письму для передачи Гюйгенсу прилагался рассказ Вивиани, упоминавшийся выше, и чертеж часов Галилея. Гюйгенс, ознакомившись с чертежами, констатировал, что в них присутствует основная идея, но нет ее технической реализации. В 1673 г. Гюйгенс напишет: «Некоторые утверждают, что Галилей пытался сделать это изобрете-

нне, но не довел дело до конца; этн лица, скорее, уменьшают славу Галнлея, чем мою, так как выходнт, что я с большим успехом, чем он, выполнил ту же задачу». Прн этом не лишне помннть, что Галнлей занимался часами слепым н был на 50 лет старше Гюйгенса, когда последний занимался той же задачей.

Первые часы Гюйгенса в максимальной степени нспользовали конструкцню часов, распространенную в то время (он нмел в внду возможность быстро переделывать уже нмевшнеся часы в маятниковые). С этого момента совершенствованне часов становится одной из главных задач Гюйгенса. Последняя работа о часах была опубликована в 1693 г. за два года до его смерти. Еслн в первой работе Гюйгенс проявнл себя прежде всего как инженер, сумевшнй реалнзовать в часовом механизме уже известное свойство изохронности маятннка, то постепенно на первый план выходит Гюйгенс — фнзик и математик.

Впрочем, в чнсле его ннженерных достиженнй были выдающиеся. Макс Лауэ выдвнгал на первый план в часах Гюйгенса ндею обратной связн: впервые энергня сообщалась маятнику без нарушения периода колебаний, «причем сам источник колебаннй определяет моменты времени, когда требуется доставка энергнн». У Гюйгенса эту роль выполняло простое н остроумное устройство в виде якоря с косо срезаннымн зубцамн, рнтмическн подталкивающего маятник.

Еще в начале своей работы Гюйгенс обнаружнл неточность утверждения Галилея об нзохронностн колебаний маятннка. Этнм свойством маятник обладает лишь при малых углах отклонення от вертикалн, но, скажем, для угла в 60° колебання заметно неизохронны (на это мог бы обратнть вниманне Галилей в опытах, описанных Внвнани). В 1673 г. Гюйгенс отмечал, что пернод для 90° относнтся к периоду для малых дуг, как 34 к 29.

ТАУТОХРОННА. Для того чтобы скомпенснровать отклонення от изохронности, Гюйгенс решил уменьшать длину маятника при увелнченни угла отклонения. В первых часах Гюйгенса с этой целью нспользовалнсь ограничители в форме щек, на которые частично наматывалась нить подвеса. Эмпнрнческий способ подбора формы щек не устраивал Гюйгенса. В 1658 г. он вообще удалил нх нз конструкцнн, вводя ограничнтели амплнтуды. Но это не означало отказа от поисков изохронного маятника. В часах 1659 г. корректнрующне пластннки появнлись

вновь, но на сей раз Гюйгенс уже умел определять форму щек теоретически.

Вот как была решена эта задача. Вместо движения маятника, длина которого уменьшается по мере удаления от вертикали, рассматривалось движение тяжелой точки по желобу, имеющему форму кривой, по которой движется конец маятника (для математического маятника это окружность). Итак, надо было найти такую кривую (ее назвали изохронной, или таутохронной), чтобы точка скатывалась вниз за одно и то же время независимо от высоты, на которой она начинала движение. Галилей ошибочно считал, что этим свойством обладает окружность (так можно перефразировать утверждение об изохронности математического маятника). Гюйгенс же обнаружил, что таутохронной является циклоида, причем по счастливой случайности поиски изохронного маятника совпали с серьезными исследованиями циклоиды по другому поводу.

Циклоиду описывает фиксированная точка окружности, которая катится без скольжения по прямой. Циклоиду открыл и предложил это название («происходящая от круга») Галилей; во Франции ее называли трохоидой, или рулеттой (там ее, по-видимому, независимо открыл



Циклоида.

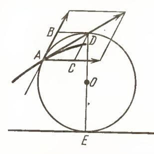
М. Мерсенн). Блез Паскаль писал: «Рулетта является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; она так часто вычерчивается перед глазами каждого, что надо удивляться тому, как не рассмотрели ее древние..., ибо это ни что иное, как путь, описываемый в воздухе гвоздем колеса, когда оно катится своим движением с того момента, как гвоздь начал подниматься от земли, до того, когда непрерывное качение колеса не приводит его опять к земле после окончания целого оборота» *).

*) О кривой, описываемой «гвоздем колеса», размышлял в середине XV века Николай Кузанский.

Когда циклоида была открыта, она быстро стала самой популярной кривой у математиков. В 1673 г. Гюйгенс констатировал, что циклоида исследована точнее и основательнее других кривых. Математики создавали в это время общие методы изучения кривых и очень нуждались в экспериментальном материале. На циклоиде, не похожей на привычные алгебраические кривые, обязательно опробовался каждый новый прием. Например, циклоида должна была решить спор между П. Ферма и Р. Декартом о преимуществах предлагавшихся ими методов проведения касательных.

Кинетическое определение циклоиды позволяло с большим изяществом решать для нее различные задачи. Открытие Гюйгенса основывалось на свойствах касательной к циклоиде. Следуя Э. Торричелли и Ж. Робервалю, эту касательную можно построить, пользуясь тем, что циклоида является траекторией движения, полученного сложением прямолинейного движения вдоль направляющей прямой и вращения катящегося (производящего) круга. По касательной направлен вектор скорости этого движения, являющийся суммой скоростей составляющих движений.

Итак, если A — положение наблюдаемой точки в какой-то момент времени, то нужно сложить горизонтальный вектор и вектор, касательный к производящему кругу в точке A. Их длины должны быть равны (в этом и состоит условие того, что качение происходит без скольжения). Значит, следует построить ромб с вершиной A, одна сторона которого горизонтальна, а другая касается окружности, и провести диагональ ромба (величины сторон не сказываются на направлении диагонали). Построим параллелограмм $ABCD$, у которого стороны AB, AC имеют указанные направления, а вершина является верхней точкой круга. Тогда прямоугольные треугольники ABO и BDO (O — центр круга) равны, т. е. AB и BD равны, и, следовательно, построен ромб. В результате *в каждой точке циклоиды прямая, соединяющая эту точку с верхней точкой производящего круга в соответствующем положении, касается циклоиды.*



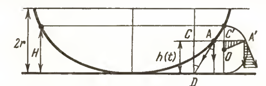
Касательная к циклоиде.

Заметим, что прямая, соединяющая точку на циклоиде с нижней точкой E производящего круга, является нормалью к циклоиде (перпендикулярна касательной). Внимание Гюйгенса к циклоиде было привлечено благодаря приглашению принять участие в конкурсе на решение серии из 6 задач о циклоиде, объявленного в июне 1658 г. Паскалем. Мы расскажем об этом конкурсе в главе, посвященной Паскалю. Гюйгенс за короткий срок, бывший в распоряжении участников конкурса, решил 4 задачи. Это была лучшая работа, если не считать работы самого Паскаля, представленной под псевдонимом Амос Деттонвиль.

После конкурса Гюйгенс вернулся к размышлениям над изохронным маятником. Он рассмотрел «перевернутую» циклоиду и исследовал, как по ней скатывается тяжелая точка. Пусть r — радиус производящего круга, а точка катится с высоты $H \leqslant 2r$. Пусть $h(t)$ — высота точки в момент времени t; $h(0) = H$. Величина скорости определяется из закона сохранения энергии и равна

$$| v(t) | = \sqrt{2g(H - h(t))};$$

скорость направлена по касательной к циклоиде. Пользуясь приведенным выше правилом проведения касательных, найдем вертикальную составляющую скорости. Если



в произвольной точке циклоиды A проведена касательная AD и точка C — проекция A на вертикаль, то $| CD | = h(t)$. В соответствии с этим построением

$$v_{\text{верт}} = | v(t) | \cos \widehat{ADC}; \quad h(t) = 2r \cos^2 \widehat{ADC};$$

$$\cos \widehat{ADC} = \sqrt{h(t)/2r};$$

$$v_{\text{верт}}(t) = \sqrt{g/r} \cdot \sqrt{h(t)(H - h(t))}.$$

Теперь можно забыть про движение точки по циклоиде и исследовать прямолинейное движение $h(t)$ со скоростью $v_{\text{верт}}(t)$ при условии $h(0) = H$. Нужно найти значение $t = \tau$, для которого $h(\tau) = 0$. Это типичная задача на решение

дифференциального уравнения, но Гюйгенс придумал искусственный прием. Он рассмотрел еще одно вспомогательное движение: пусть по окружности диаметра H (а не $2r$) равномерно вращается точка со скоростью w, начиная с верхней точки. Пусть в момент времени t она находится на высоте $h(t)$ в точке A'. Нетрудно найти вертикальную составляющую скорости в этой точке. Действительно,

$$w_{\text{верт}} = |w| \cos \widehat{C'A'O};$$

$$\cos \widehat{C'A'O} = \frac{|C'A'|}{OA'} = \frac{2|C'A'|}{H} = \frac{2}{H}\sqrt{h(t)(H-h(t))};$$

$$w_{\text{верт}} = \frac{2|w|}{H}\sqrt{h(t)(H-h(t))},$$

где O — центр, C' — проекция A' на вертикальный диаметр. Если $2|w| = H\sqrt{g/r}$, то проекция вращающейся точки на вертикаль будет двигаться так же, как проекция на вертикаль точки, катящейся по циклоиде. В частности, все точки окажутся внизу через время $\tau = \pi\sqrt{r/g}$. При этом H сократилось, что и отражает замечательный факт: *время* τ, *через которое точка, катящаяся по циклоиде, окажется в нижней точке, не зависит от высоты* H, *на которой начинается движение, и равно* $\pi\sqrt{r/g}$. Значит, *циклоида является таутохронной* *).

Тяжелая точка, скатывающаяся по циклоидальному желобу, вернется в исходное положение через время T, равное 4τ; T будет отвечать периоду колебаний циклоидального маятника. Имеем

$$T = 4\pi\sqrt{r/g}. \qquad (*)$$

Формула (*) настолько напоминает гипотетическую формулу Галилея для периода математического маятника длины l $(T = 2\pi\sqrt{l/g})$, что было естественно попытаться воспользоваться (*) для обоснования последней. И в самом деле, с помощью (*) Гюйгенс получил первое строгое доказательство формулы для периода колебаний математического маятника при малых углах размаха φ. Он заметил, что при малых углах круговой желоб почти не от-

---

*) Фактически доказано, что движение тяжелой материальной точки по циклоидальному желобу можно представить в виде суммы равномерного вращательного движения с угловой скоростью, не зависящей от того, с какой высоты H пущена точка, и некоторого (вообще говоря, неравномерного) поступательного движения. При $H = 2r$ это легко вывести из кинематического определения циклоиды.

личается от циклоидального, и оставалось только понять, при каком соотношении между длиной l математического маятника и параметром r циклоиды это отличие наименьшее. Оказалось, что при $l=4r$ (это не очевидный факт; мы еще к нему вернемся). Подставляя в (*) $r=l/4$, получаем формулу для периода математического маятника: $T\approx 2\pi\sqrt{l/g}$ (при малых φ).

ЦИКЛОИДАЛЬНЫЙ МАЯТНИК. На этом решение задачи об изохронном маятнике еще не закончено. Показано, что конец маятника должен двигаться по циклоиде, но надо еще организовать это движение. Для этой цели и применены щеки, на которые наматывается нить. Надо найти их форму.

В «Маятниковых часах» эта задача решена как часть общей задачи о развертке кривых. Интересно, что этими вопросами Гюйгенс начал интересоваться еще в 1654 г., задолго до занятий изохронным маятником.

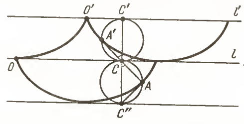
Пусть имеется препятствие, ограниченное кривой L, в некоторой точке O которого закреплена нерастяжимая нить длины l. Натянутую нить мы наматываем на препятствие, наблюдая за кривой M, которую описывает незакрепленный конец нити. Гюйгенс называл кривую M р а з в е р т к о й кривой L; теперь M называют э в о л ь в е н т о й кривой L, а L — э в о л ю т о й кривой M (с одной эволютой связывается много эвольвент, отвечающих разным длинам l). Нам нужно найти эволюту циклоиды.

Кривая M состоит из таких точек B, что сумма длин отрезка касательной BA к кривой L в точке A и дуги AO кривой L равна l (это в точности означает натянутость частично намотанной на L нити). Первая догадка Гюйгенса заключалась в том, что *касательная к кривой M в точке B перпендикулярна к AB*, т. е. что AB — касательная к кривой L в точке B — является одновременно нормалью к кривой M в точке B. Проще всего пояснить этот факт, исходя из кинематического определения кривой M. Вспомним, что вектор скорости направлен по касательной к траектории движения и что при изменении действия сил вектор скорости не может измениться мгновенно. «Обрубим» в точке A препятствие, но будем продолжать движение натянутой нити; тогда конец нити начнет двигаться по окружности с центром в точке A; векторная же скорость его в точке B не изменится; поэтому в точке B у кривой M и окружности с центром A будет общая касательная, перпендикулярная к радиусу BA.

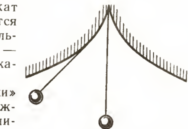
Следующая догадка Гюйгенса состояла в том, что в «хорошей» ситуации *эволюта кривой восстанавливается однозначно* (помните, у одной кривой много эвольвент)! Дело в том, что нормали к кривой M в разных точках — это касательные к ее эволюте L. «Хорошую» же кривую по касательным можно восстановить: взяв много касательных, построить описанную ломаную и, «учащая» затем касательные, все лучше приближать кривую (говорят, что кривая огибает множество своих касательных).

Нам нужно найти кривую, касательные к которой будут нормалями к заданной циклоиде. Гюйгенс догадался, что *этой кривой будет такая же циклоида, только поднятая на $2r$ и сдвинутая на полпериода* (так, что ее вершины совпадают с остриями исходной циклоиды).

В самом деле, пусть $r=1$; l и l' — направляющие прямые соответственно нижней и верхней циклоид, O и O' —



их начальные точки (l' на две единицы выше l; O' на π единиц правее O). Возьмем на прямой l точку C и рассмотрим положение производящих кругов (обеих циклоид), когда они касаются l в этой точке C. Пусть C' и C'' — диаметрально противоположные ей точки соответственно верхнего и нижнего кругов, A и A' — соответствующие точки циклоид. Дуга $C C'' A$ равна по длине отрезку OC; поэтому она на π больше дуги $C'A'$, равной по длине отрезку $O'C'$. Отсюда $\widehat{C'CA'} = \widehat{C''CA}$ и точки A', C, A лежат на одной прямой. Остается заметить, что CA' — касательная к верхней циклоиде, а CA — нормаль к нижней (AC'' — касательная к ней).



Теперь мы знаем, что «щеки» таутохронного маятника должны быть циклоидальными и дли-

на нити l должна равняться $4r$ (именно при таком значении l мы в качестве эвольвенты получим нужную циклоиду). При малых же углах размаха φ регулирующие «щеки» почти не влияют на длину маятника, и циклоида близка к дуге окружности радиуса $4r$ (см. конец предыдущего пункта).

ТЕОРЕМА КРИСТОФЕРА РЕНА. Нить намотается полностью, когда ее конец окажется в общей точке для обеих циклоид. Отсюда следует, что длина одной арки циклоиды равна удвоенной длине нити, т. е. $8r$. Эта теорема, которая у Гюйгенса была простым следствием теории развертки кривых, была доказана английским математиком К. Реном в 1658 г. в связи с конкурсом Паскаля.

Теорема Рена произвела на современников очень большое впечатление. Дело в том, что уже после того, как математики достигли больших успехов в нахождении площадей криволинейных фигур, они никак не могли продвинуться в проблеме ректификации — построении циркулем и линейкой отрезка, равного длине кривой, или алгебраической ректификации — выражении длины через алгебраические операции. К середине XVII века начали думать, что ректификация вообще никогда невозможна (так иногда толкуют слова Декарта «мы, люди, не можем найти соотношения между прямыми и кривыми»). Ректификация циклоиды, найденная Реном, опровергала эту точку зрения. Некоторое время думали, что все дело в том, что циклоида не является алгебраической кривой, но В. Нейль, И. Хейрат и П. Ферма независимо обнаружили, что алгебраическую ректификацию допускает полукубическая парабола $y^2=ax^3$ (работа Нейля даже предшествовала работе Рена, но не была известна).

Теория Гюйгенса вскрыла казавшуюся таинственной причину, по которой полукубическая парабола обладает этим замечательным свойством. Оказалось, что ее разверткой является обычная квадратичная парабола. Точнее, эволютой параболы $y=x^2$ является кривая $y={}^1/_2+3({}^1/_4x)^{2/3}$. Гюйгенс систематически продумал следствия, которые дает теория развертки кривых сверх применений к маятникам: «Для применения моего изобретения к маятникам мне необходимо было установить новую теорию, а именно теорию образования новых линий при посредстве развертывания кривых линий. Здесь я столкнулся с задачей сравнения кривых и прямых линий. Я изучил этот вопрос несколько дальше, чем нужно было

для моей цели, так как теория показалась мне изящной и новой». Теория развертки кривых, в которой впервые при изучении кривых, по существу, появились вторые производные, была одной из первых глав дифференциальной геометрии.

Мы подробно рассказали о циклоидальном маятнике, изобретению которого Гюйгенс придавал наибольшее значение: «Для проведения этих доказательств потребовалось укрепить и, где нужно, дополнить учение великого Галилея о падении тел. Наиболее желательным плодом, как бы величайшей вершиной этого учения, и является открытое мною свойство циклоиды».

ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ СИЛЫ И ЧАСЫ С КОНИЧЕСКИМ МАЯТНИКОМ. Циклоидальный маятник — не единственное изобретение, сделанное Гюйгенсом в процессе совершенствования часов. Другое направление в его исследованиях по хронометрии связано с теорией центробежных сил. Эта теория была создана Гюйгенсом и показательно, что впервые она была опубликована в «Маятниковых часах». В пятой части этой книги без доказательства приводятся теоремы о центробежной силе и описывается конструкция часов с коническим маятником (известно, что Гюйгенс изобрел их 5 октября 1659 г.). Доказательства теорем содержатся в работе «О центробежной силе», написанной в 1659 г., но вышедшей в свет лишь через восемь лет после смерти Гюйгенса. О центробежной силе знал еще Аристотель, а Птолемей считал, что если бы Земля вращалась вокруг своей оси, то из-за центробежной силы предметы не могли бы удерживаться на ее поверхности. Кеплер и Галилей опровергали эту точку зрения, объясняя, что в этом случае вес уравновешивает центробежную силу, фактически предполагая, что при удалении от центра вращения центробежная сила уменьшается. Однако лишь Гюйгенс получил знаменитую формулу для центробежной силы $F_{\text{ц.б}} = mv^2/R$, к которой был очень близок Галилей. В дополнении приводится подлинный текст Гюйгенса и читатель сможет увидеть, в каком (быть может, не самом экономном с сегодняшней точки зрения) виде были впервые сообщены результаты, полученные Гюйгенсом.

Какой бы задачей Гюйгенс ни занимался, он всегда думал о возможных приложениях полученных результатов к часам. И в этом случае он хотел воспользоваться коническим маятником. Так называется нить с грузом, враща-

ющаяся вокруг оси, проходящей через точку подвеса. Пусть l — длина нити, α — угол нити с вертикалью, R — расстояние от груза до оси. Если маятник движется по окружности и угол α остается постоянным, то $mv^2/R = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Отсюда $v = \sqrt{gR\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. Для периода — времени одного оборота — получаем (поскольку $T = 2\pi R/v$)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\mathrm{ctg}\,\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{u}{g}}.$$

Здесь $u = l\cos\alpha$ — длина проекции нити на ось маятника.

В тексте Гюйгенса проводятся многочисленные обсуждения формулы для периода конического маятника. Движение конического маятника сравнивается с двумя движениями, которые к тому времени были основательно изучены: со свободным падением и колебаниями простого (или математического) маятника (Гюйгенс называет его колебания боковыми в отличие от круговых колебаний конического маятника).

Итак, период определяется проекцией нити на ось. Трудность в построении изохронного конического маятника заключается в том, что постепенно угол с осью уменьшается и период увеличивается. Гюйгенс рассчитал, что для того чтобы период оставался неизменным, надо с уменьшением угла так уменьшать длину нити, чтобы ее конец постоянно находился на параболоиде вращения.

В самом деле, пусть имеется некоторая поверхность вращения (у Гюйгенса параболоид — поверхность вращения параболы $py = x^2$ вокруг оси y). Тяжелая материальная точка устойчиво вращается по горизонтальному сечению (кругу), если равнодействующая веса и центробежной силы направлена по нормали к поверхности (перпендикуляру к касательной плоскости), а потому здесь применима формула для конического маятника. В этом случае α — угол нормали с осью, l — длина отрезка нормали между осью и поверхностью, u — проекция этого отрезка на ось. Здесь переход от конического маятника к вращению тяжелой точки в какой-то мере аналогичен переходу Галилея от математического маятника к движению тяжелой точки по круговому желобу. Далее Гюйгенс замечает, что у параболы $py = x^2$ величина u (проекция отрезка нормали на ось) не зависит от положения точки и равна $p/2$. Отсюда он делает вывод, что период вращения

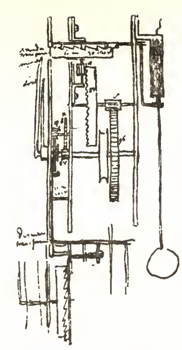
тяжелой точки по любым горизонтальным сечениям параболоида один и тот же:

$$T=2\pi\sqrt{p/2g}.$$

Это дает новый способ получения изохронных колебаний, что, по мнению Гюйгенса, было важно при построении часов. Если подвесить конический маятник так, чтобы независимо от угла α наклона нити к оси его конец двигался по поверхности параболоида, полученного от вращения параболы $py=x^2$, то период вращения не будет зависеть от α. Другими словами, надо сделать так, чтобы при изменении α длина l изменялась, обеспечивая постоянство проекции u на ось. Гюйгенс придумал чрезвычайно остроумный способ подвески. Он предложил изготовить пластинку по форме полукубической параболы $y^2=ax^3+b$, закрепить в некоторой ее точке конец нити и тогда, оказывается, можно так подобрать a, b и длину нити, что как бы мы ни натянули нить, намотав часть ее на пластинку, другой ее конец будет находиться на параболе. Секрет этого остроумного способа подвески опирается на те же математические соображения, что и способ подвески циклоидального маятника.

Заметим, что эти же вычисления помогли Гюйгенсу в 1687 г. быстро решить задачу Лейбница о кривой, по которой тяжелая точка движется так, что пути, пройденные ею в равные промежутки времени, имеют равные проекции на вертикаль. Этим свойством обладает полукубическая парабола.

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК. Одно из главных достижений Гюйгенса относится к теории физического маятника, т. е. речь идет уже не о колебании точечного груза, а о колебании конфигурации грузов или тяжелой пластины. Эта задача возникла в связи с идеей иметь, кроме основного груза на конце маятника, подвижный груз, позволяющий регулировать период качаний маятника. Гюйгенс почерпнул эту идею у гаагского мастера Доу, который в 1658 г. взял патент на свой вариант маятниковых часов, мало отличающийся от часов Гюйгенса. Задачи о колебаниях физического маятника возникали и раньше. Для механики переход от движения материальной точки к движению протяженных конфигураций был принципиальным. Первая серия таких задач относилась к центру тяжести, и здесь важные результаты были известны. В задачах же о колебаниях физического маятника



Эскиз часов с циклоидальным маятником, сделанный Гюйгенсом.

долго не удавалось сделать ничего существенного *).

О задачах про физический маятник Гюйгенс узнал от Мерсенна: «Когда я был еще почти мальчиком (ему не было 17 лет — *С. Г.*), ученейший муж Мерсенн задал мне и многим другим задачу — определить центр качания. Из писем, которые писал мне Мерсенн, а также из недавно опубликованных мемуаров Декарта, заключающих ответ на письма Мерсенна по этому поводу, я заключаю, что эта задача пользовалась в это время известной славой среди математиков... Мерсенн назначил большую, вызывающую зависть премию на тот случай, если я решу задачу. Однако он тогда ни от кого не получил того, что требовал..., я в то время не нашел, что позволило бы мне приступить к расчетам, и как бы повернул назад у самого порога, и воздержался от всякого исследования. Но и те, кто надеялись, что решили задачу, знаменитые люди, как Декарт, Оноре Фабри и другие, вовсе не достигли цели или достигли ее только в немногих, особенно простых случаях.

Повод к новой постановке опытов дали регулируемые маятники наших часов, снабженные, кроме нижнего постоянного груза, еще вторым подвижным грузиком, как сказано при описании часов. Исходя из этого, я начал исследования сначала, на этот раз с лучшими видами на успех и, наконец, преодолел все трудности и решил не только все задачи Мерсенна, но нашел еще и новые задачи, более трудные, и, наконец, нашел общий метод для вы-

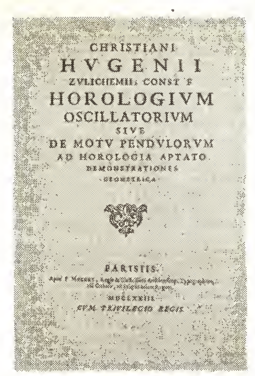
*) Напомним, что приведенной длиной физического маятника называется длина математического маятника, имеющего тот же период колебаний, а центр качания — это точка, лежащая на прямой, соединяющей точку подвеса с центром тяжести, на расстоянии от точки подвеса, равном приведенной длине.

числения центров качания линий, площадей и тел. От этого я имел не только удовольствие, что я нашел нечто, что напрасно искали столь многие, и понял законы природы, относящиеся к этому случаю, но получил и определенную пользу, которая вообще заставила меня заняться этим вопросом, а именно я нашел легкий и удобный способ регулировки часов. К этому, однако, присоединилось то, что я считаю еще более ценным, а именно: благодаря своему открытию я смог дать абсолютно устойчивое определение для постоянной, верной для всех времен меры длины».

Последняя идея, о которой пишет Гюйгенс, состояла в том, что подобно тому, как для измерения времени имеется естественная единица измерения — сутки, для измерения длины такой единицей предлагалось считать $^1/_3$ длины маятника, период колебаний которого равен одной секунде.

Задачи о центре качания были не доступны с позиций разработанных к тому времени методов математического анализа. Гюйгенс заметил, что целый ряд трудностей можно преодолеть, исходя из энергетических соображений: центр тяжести при движении не может подняться выше, чем он был в начале движения (иначе существовал бы вечный двигатель). Этот способ доказательства вызывал возражения у ряда крупных ученых, и было затрачено много сил, прежде чем Я. Бернулли удалось получить аналогичные утверждения на другом пути.

МОРСКИЕ ЧАСЫ. 1673 год был вершиной деятельности Гюйгенса по маятниковым часам. В этом году вышла его книга «Маятниковые часы», а парижский часовщик Исаак Тюре изготовил экземпляр часов с учетом всех усовершенствований. Маятниковые часы прочно вошли в обиход, но надежды на морские маятниковые часы не оправдались. Первые экземпляры таких часов были изготовлены в 1661 г., а с 1663 г. начались их испытания. Вначале граф Брюс взял с собой часы при плавании из Голландии в Лондон, но часы остановились; более успешными были испытания капитана Холмса при плавании из Лондона в Лиссабон. О драматических событиях, связанных с испытанием часов во время плавания английской эскадры в Гвинее, рассказывает Гюйгенс в «Маятниковых часах». Испытания проходили с переменным успехом до 1687 г., хотя стало ясно, что надежного средства для измерения долготы маятниковые часы не дают. Постепенно спрос на морские часы упал, и в 1679 г. сам Гюйгенс


CHRISTIANI
HVGENII
ZVLICHEMII, CONST. F.
HOROLOGIVM
OSCILLATORIVM
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM
AD HOROLOGIA APTATO
DEMONSTRATIONES
GEOMETRICAE.

PARISIIS,

MDCLXXIII.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Титульный лист первого издания «Маятниковых часов»

склонился к тому, что морской хронометр должен представлять собой пружинные часы с балансиром. Такой хронометр удалось создать в 1735 г. Дж. Харрисону, который и получил премию в 20 тыс. фунтов от английского правительства.

Прошло 300 лет. Маятниковые часы сослужили добрую службу людям, которые нечасто знают имя их создателя. Драматическая история работы Гюйгенса над маятниковыми часами очень поучительна. В некотором смысле его главные надежды не осуществились: ему не удалось создать морской хронометр, а в сухопутных часах циклоидальный маятник, который Гюйгенс считал своим главным изобретением, не прижился (вполне хватало ограничителей амплитуды). Та же участь постигла конический маятник. Но те математические и физические результаты, получение которых стимулировалось задачей о совершен-

ствовании часов, навсегда остались в анализе бесконечно малых, дифференциальной геометрии, механике, и их значение трудно переоценить.

Приложение

ПЯТАЯ ЧАСТЬ «МАЯТНИКОВЫХ ЧАСОВ», СОДЕРЖАЩАЯ ДРУГУЮ КОНСТРУКЦИЮ ЧАСОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРУГОВОГО ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКОВ И ТЕОРЕМЫ О ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЕ

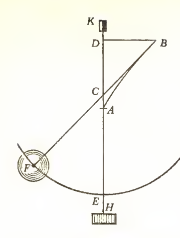
...У меня было намерение издать описание этих часов вместе с теоремами, относящимися к круговому движению и к центробежной силе, как я хочу ее назвать. Но относительно этого предмета у меня больше материала, чем времени для его изложения в настоящий момент. Но для того чтобы лица, интересующиеся этим вопросом, быстрее познакомились с новым, отнюдь не бесполезным открытием, чтобы какая-либо случайность не помешала опубликованию, я, противно моему первоначальному предположению, присоединил еще и эту часть к предыдущим. В ней кратко описывается конструкция новых часов и далее следуют теоремы о центробежной силе, их доказательство откладывается на более позднее время.

Конструкция вторых часов

Я не счел нужным изложить здесь распределение колес внутри часового механизма; это устройство легко могут осуществить часовщики в различных вариантах. Будет достаточным описать ту часть часов, которая регулирует их ход определенным образом.

Следующий рисунок изображает эту часть часов.

Ось DH следует представлять себе вертикальной, способной вращаться в двух подшипниках. В A к оси приделана пластинка, имеющая определенную ширину и искривленная по кривой AB, которая есть полукубическая парабола, при сматывании нити с которой и прибавлении некоторой длины описывается парабола EF, как доказано в теореме VIII третьей части. AE — длина, на которую надо удлинить нить; путем сматывания всей линии BAE и образуется парабола EF. BCF — нить, закрепленная на кривой AB, конец которой описывает параболу. К нити прикреплен груз F. Если ось DH вращается, тогда нить



BCF, вытянутая в прямую, повлечет за собой груз F, который будет описывать горизонтальные круги. Эти круги будут больше или меньше в зависимости от большей или меньшей силы, с которой действуют на ось колеса, вращающие барабан K. Но все эти круги будут лежать на параболическом коноиде, и именно потому продолжительность одного оборота будет всегда одна и та же, как вытекает из того, что я объясню об этом движении впоследствии. Если оборот должен совершаться в полсекунды, то параметр параболы EF должен составлять $4^1/_2$ дюйма моего часового фута, т. е. он должен быть равен половине длины маятника, у которого каждое колебание длится $^1/_2$ секунды. Из параметра параболы определяется параметр полукубической параболы; он равен $^{27}/_{16}$ первого параметра; определяется также отрезок AE, который равен половине длины параметра параболы EF. Если же оборот должен совершаться в секунду, то надо все длины брать в четыре раза больше, как параметры, так и длину AE.

Теоремы о центробежной силе, вызванной круговым движением *)

I

Если два одинаковых тела в одинаковое время описывают неодинаковые окружности, то их центробежные силы относятся, как длины окружностей или как диаметры.

II

Если два одинаковых тела движутся с одинаковой скоростью по окружности разных кругов, то их центробежные силы обратно пропорциональны диаметрам.

*) Примечания к тексту даны в квадратных скобках. В примечаниях используются обозначения: m — масса тела, F — центробежная сила, T — период, R — расстояние до центра, v — скорость.

III

Если два одинаковых тела движутся по одинаковым кругам с разной скоростью, но оба равномерно, как мы это здесь всегда подразумеваем, то их центробежные силы относятся, как квадраты скоростей.

IV

Если два одинаковых тела движутся по разным окружностям и обнаруживают одинаковую центробежную силу, то их времена обращения относятся, как корни квадратные из диаметров.

V

Если тело движется по окружности круга с той скоростью, которую бы оно приобрело, свободно падая с высоты $^1/_4$ диаметра круга, то испытываемая им центробежная сила равна весу, т. е. оно тянет за нить, при помощи которой оно прикреплено к центру, с той же силой, как если бы было подвешено к нити.

[Если высота $H = R/2$, то для конечной скорости при свободном падении имеем $v = \sqrt{2gH} = \sqrt{Rg}$, а для указанной центробежной силы имеем $F = mv^2/R = mRg/R = mg$.]

VI

Если тело пробегает различные горизонтальные окружности, которые все лежат на кривой поверхности параболического коноида (параболоида) с вертикальной осью, то время оборотов всегда одно и то же, будут ли круги больше или меньше, и это время обращения вдвое больше продолжительности колебания маятника, длина которого равна половине параметра образующей параболы.

БЛЕЗ ПАСКАЛЬ

Паскаль носил в душе водоворот без дна.
Ш. Бодлер «Пропасть» *)

Блезу Паскалю была присуща удивительная разносторонность, которая была характерна для эпохи Возрождения, но уже почти изжила себя в XVII веке. Еще не наступило время полного размежевания естественных наук (скажем, физики и математики), но занятия гуманитарные и естественно-научные уже обычно не совмещались.

В историю естествознания Паскаль вошел как великий физик и математик, один из создателей математического анализа, проективной геометрии, теории вероятностей, вычислительной техники, гидростатики. Франция чтит в Паскале одного из самых замечательных писателей: «Тонкие умы удивляются Паскалю как писателю самому совершенному в величайший век французского языка... Каждая строка, вышедшая из-под его пера, почитается как драгоценный камень» (Жозеф Бертран). Далеко не все соглашались с мыслями Паскаля о человеке, его месте во Вселенной, смысле жизни, но никто не оставался равнодушным к строкам, за которые их автор заплатил жизнью и которые удивительным образом не старились. В 1805 г. Стендаль писал: «Когда я читаю Паскаля, мне кажется, что я читаю себя». А через сто лет в 1910 г. Л. Н. Толстой читал «чу́дного Паскаля», «человека великого ума и великого сердца» и «не мог не умилиться до слез, читая его и сознавая свое полное единение с этим умершим сотни лет тому назад человеком». Поучительно сопоставить, как старятся идеи естественно-научные и гуманитарные.

Упомянем еще об одной грани наследия Паскаля — его практических достижениях. Некоторые из них удостоились высшего отличия — сегодня мало кто знает имя их автора. Для И. С. Тургенева мерилами удобства и

*) Перевод К. Бальмонта.

простоты были «яйцо Колумба» и «Паскалева тачка». Узнав, что великий ученый изобрел самую обыкновенную тачку, он писал Н. А. Некрасову: «Кстати я в одном месте говорю о Паскалевой тачке — ты знаешь, что Паскаль изобрел эту, по-видимому, столь простую машину». А еще Паскалю принадлежит идея омнибусов — общедоступных карет («за 5 су») с фиксированными маршрутами — первого вида регулярного городского транспорта.



Блез Паскаль, 1623—1662

Паскаль — один из самых знаменитых людей в истории человечества. Ему посвящена необъятная литература. Каких только сторон жизни и наследия Паскаля не касалось «паскалеведение». Особенно популярен Паскаль во Франции. Имеется своеобразное свидетельство этого: портрет Паскаля воспроизведен на ассигнациях (кроме того, имеются купюры с портретами Корнеля, Расина, Вольтера и Пастера; некоторое время назад по техническим причинам были изъяты из обращения ассигнации с портретами Наполеона и Мольера).

ПАЛОЧКИ И МОНЕТКИ. Когда мы учимся рисовать графики, то в калейдоскопе безымянных кривых иногда появляются кривые, имеющие какое-то название или носящие чье-то имя: спираль Архимеда, трезубец Ньютона, конхоида Никомеда, лист Декарта, локон Марии Аньезе, улитка Паскаля... Редко, кто усомнится в том, что это тот же Паскаль, которому принадлежит «закон Паскаля». Однако в названии замечательной кривой 4-го порядка увековечено имя Этьена Паскаля (1588—1651) — отца Блеза Паскаля. Э. Паскаль, как было принято в роде Паскалей, служил в парламенте (суде) города Клермон-Феррана. Совмещение юридической деятельности с занятиями науками, далекими от юриспруденции, было делом нередким. Примерно в это же время посвящал математике свой досуг советник тулузского парламента Пьер Ферма (1601—1665). Хотя собственные достижения Э. Паскаля были скромными, его основательные познания позволяли

ему поддерживать профессиональные контакты с большинством французских математиков. С великим Ферма он обменивался трудными задачами на построение треугольников; в споре Ферма с Рене Декартом (1596—1650) о задачах на максимум и минимум Паскаль выступал на стороне Ферма. Б. Паскаль унаследовал добрые отношения отца со многими математиками, но вместе с тем к нему перешли и напряженные отношения с Декартом.

Рано овдовев, Этьен Паскаль посвящает себя главным образом воспитанию своих детей (кроме сына, у него было две дочери — Жильберта и Жаклина). У маленького Блеза очень рано обнаруживается поразительное дарование, но, как это часто бывает, в сочетании с плохим здоровьем. (Всю жизнь с Б. Паскалем случались странные происшествия; в раннем детстве он едва не погиб от непонятной болезни, сопровождавшейся припадками, которую семейная легенда связывает с колдуньей, сглазившей мальчика.)

Этьен Паскаль тщательно продумывает систему воспитания детей. На первых порах он решительно исключает математику из числа предметов, которым обучает Блеза: отец боялся, что ранняя увлеченность математикой помешает гармоничному развитию, а неизбежные напряженные размышления повредят слабому здоровью сына. Однако 12-летний мальчик, узнав о существовании таинственной геометрии, которой занимался отец, уговорил его рассказать о запретной науке. Полученных сведений оказалось достаточно для того, чтобы начать увлекательную «игру в геометрию», доказывать теорему за теоремой. В этой игре участвовали «монетки» — круги, «треуголки» — треугольники, «столы» — прямоугольники, «палочки» — отрезки. Мальчик был застигнут отцом в тот момент, когда он обнаружил, что углы треуголки составляют столько же, сколько два угла стола. Э. Паскаль без труда узнал знаменитое 32-е предложение первой книги Евклида — теорему о сумме углов треугольника. Результатом были слезы на глазах отца и доступ к шкафам с математическими книгами.

История о том, как Паскаль сам построил евклидову геометрию, известна по восторженному рассказу его сестры Жильберты. Этот рассказ породил очень распространенное заблуждение, заключающееся в том, что раз Паскаль открыл 32-е предложение «Начал» Евклида, то он



Паскаль в юности (рисунок Жана Дома).

открыл перед этим все предыдущне теоремы и все аксиомы. Нередко это воспринималось как аргумент в пользу того, что аксноматика Евклнда — единственно возможная. На самом же деле, вероятно, геометрня у Паскаля находнлась на «доевклидовском» уровне, когда интуитнвно неочевндные утверждення доказываются путем сведения к очевндным, причем набор последннх ннкак не фнксируется н не ограннчивается. Лншь на следующем, существенно более высоком уровне делается велнкое открытие, что можно ограннчнться конечным, сравннтельно небольшнм набором очевидных утвержденнй — аксном, предположив истннность которых, можно остальные геометрнческие утверждения доказать. Прн этом, наряду с неочевнднымн утвержденнями (такнмн, как, например, теоремы о замечательных точках треугольннка), прнходится доказывать «очевндные» теоремы, в справедлнвость которых легко поверить (например, простейшие признакн равенства треугольннков).

Собственно, 32-е предложенне — первое неочевндное в этом смысле предложенне «Начал». Нет сомнения, что у юного Паскаля не было ни временн для огромной

работы по отбору аксиом, ни, скорее всего, потребности в ней.

Это интересно сопоставить со свидетельством А. Эйнштейна, который в те же 12 лет в значительной степени самостоятельно постигал геометрию (в частности, нашел доказательство теоремы Пифагора, о которой узнал от дяди): «Вообще мне было достаточно, если я мог в своих доказательствах опираться на такие положения, справедливость которых представлялась мне бесспорной».

Примерно в 10 лет Б. Паскаль сделал первую физическую работу: заинтересовавшись причиной звучания фаянсовой тарелки и проведя поразительно хорошо организованную серию экспериментов при помощи подручных средств, он объяснил заинтересовавшее его явление колебанием частичек воздуха.

«МИСТИЧЕСКИЙ ШЕСТИВЕРШИННИК», ИЛИ «ВЕЛИКАЯ ПАСКАЛЕВА ТЕОРЕМА». В 13 лет Б. Паскаль уже имеет доступ в математический кружок Мерсенна, в который входило большинство парижских математиков, в том числе Э. Паскаль (Паскали жили в Париже с 1631 г.).

Францисканский монах Марен Мерсенн (1588—1648) сыграл в истории науки большую и своеобразную роль ученого-организатора *). Его основная заслуга состояла в том, что он вел обширную переписку с большинством крупных ученых мира (у него было несколько сот корреспондентов). Мерсенн умело концентрировал информацию и сообщал ее заинтересованным ученым. Эта деятельность требовала своеобразного дарования: умения быстро понимать новое, хорошо ставить задачи. Обладавший высокими нравственными качествами, Мерсенн пользовался доверием корреспондентов. Иногда письма Мерсенна адресовались совсем молодым ученым. Так, в 1846 г. он начал переписываться с 17-летним Гюйгенсом, помогая в его первых шагах в науке и предвещая, что тот станет «Аполлонием и Архимедом... грядущего века».

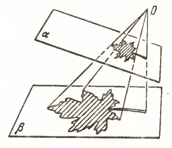
Наряду с заочным коллективом корреспондентов существовал и очный кружок — «четверги Мерсенна», в который и попал Блез Паскаль. Здесь он нашел себе достойного учителя. Им был Жерар Дезарг (1593—1662), инженер и архитектор, создатель оригинальной теории перс-

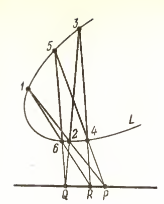
*) При оценке деятельности Мерсенна надо иметь в виду, что первый научный журнал — «Журнал ученых» — был основан в 1665 г.

пективы. Его главное сочетание «Черновой набросок вторжения в область того, что происходит при встрече конуса с плоскостью» (1639 г.) нашло лишь нескольких читателей, и среди них особое место занимает Б. Паскаль, сумевший существенно продвинуться вперед.

Хотя в то время Декарт прокладывал в геометрии совершенно новые пути, создавая аналитическую геометрию, в основном, геометрия едва достигла уровня, на котором она находилась в Древней Греции. Многое из наследия греческих геометров оставалось неясным. Это прежде всего относилось к теории конических сечений. Самое выдающееся сочинение на эту тему — 8 книг «Konika» Аполлония — было известно лишь частично. Предпринимались попытки дать модернизированные изложения теории, среди которых наиболее известное принадлежит Клоду Мидоржу (1585—1647), члену кружка Мерсенна, но его сочинение фактически не содержало новых идей. Дезарг заметил, что систематическое применение метода перспективы позволяет построить теорию конических сечений с совершенно новых позиций.

Рассмотрим центральную проекцию из некоторой точки O картинок на плоскости α на плоскость β. Применять такое преобразование в теории конических сечений очень естественно, поскольку само их определение — как сечений прямого кругового конуса — можно перефразировать так: все они получаются при центральном проектировании из вершины конуса на различные плоскости одного из них (например, окружности). Далее, заметив, что при центральном проектировании пересекающиеся прямые могут перейти или в пересекающиеся, или в параллельные, объединим два последних свойства в одно, считая, что все параллельные друг другу прямые пересекаются в одной «бесконечно удаленной точке»; разные пучки параллельных прямых дают разные бесконечно удаленные точки; все бесконечно удаленные точки плоскости заполняют «бесконечно удаленную прямую». Если принять эти соглашения, то две любые различные прямые (уже не исключая параллельных) будут пересекаться в единственной точке. Утверждение, что через точку A вне прямой m можно провести





единственную прямую, параллельную m, можно переформулировать так: через обычную точку A и бесконечно удаленную точку (отвечающую семейству прямых, параллельных m) проходит единственная прямая — в результате в новых условиях без всяких ограничений справедливо утверждение, что через две различные точки проходит единственная прямая (бесконечно удаленная, если обе точки бесконечно удалены). Мы видим, что получается очень изящная теория, но для нас важно то, что при центральном проектировании точка пересечения прямых (в обобщенном смысле) переходит в точку пересечения.

Важно продумать, какую роль в этом утверждении играет введение бесконечно удаленных элементов (при каких условиях точка пересечения переходит в бесконечно удаленную точку, когда прямая переходит в бесконечно удаленную прямую). Не останавливаясь на использовании этого простого соображения Дезаргом, мы расскажем о том, как замечательно применил его Паскаль.

В 1640 г. Б. Паскаль напечатал свой «Опыт о конических сечениях». Небезынтересны сведения об этом издании: тираж — 50 экземпляров, 53 строки текста напечатаны на афише, предназначенной для расклейки на углах домов (про афишу Паскаля достоверно не известно, но Дезарг заведомо рекламировал таким способом свои результаты). В афише, подписанной инициалами автора, без доказательства сообщается следующая теорема, которую ныне называют теоремой Паскаля. *Пусть на коническом сечении* L (на рисунке L — парабола) *произвольно выбраны и занумерованы* 6 *точек. Обозначим через* P, Q, R *точки пересечения трех пар прямых* (1, 2) и (4, 5); (2, 3) и (5,6); (3, 4) и (6, 1). При простейшей нумерации («по порядку») — это точки пересечения противоположных сторон шестиугольника. *Тогда точки* P, Q, R *лежат на одной прямой* *).

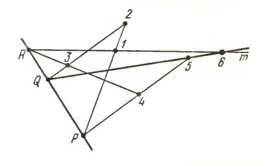
*) Сформулируйте самостоятельно следствия, получающиеся из этой теоремы, когда некоторые из рассмотренных точек являются бесконечно удаленными.

Паскаль вначале формулирует теорему для окружности и ограничивается простейшей нумерацией точек. В этом случае это элементарная, хотя и не слишком простая задача. А вот переход от окружности к любому коническому сечению очень прост. Нужно преобразовать при помощи центральной проекции такое сечение в окружность и воспользоваться тем, что при центральном проектировании прямые переходят в прямые, а точки пересечения (в обобщенном смысле) — в точки пересечения. Тогда, как уже доказано, образы точек P, Q, R при проектировании будут лежать на одной прямой, а отсюда следует, что и сами точки P, Q, R обладают этим свойством.

Теорема, которую Паскаль назвал теоремой о «мистическом шестивершиннике», не была самоцелью; он рассматривал ее как ключ для построения общей теории конических сечений, покрывающей теорию Аполлония. Уже в афише упоминаются обобщения важных теорем Аполлония, которые не удавалось получить Дезаргу. Дезарг высоко оценил теорему Паскаля, назвав ее «великой паскалевой»; он утверждал, что в ней содержатся первые четыре книги Аполлония.

Паскаль начинает работу над «Полным трудом о конических сечениях», который в 1654 г. упоминается как оконченный в послании «Знаменитейшей Парижской математической академии». От Мерсенна известно, что Паскаль получил около 400 следствий из своей теоремы. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) был последним, кто видел трактат Паскаля уже после его смерти, в 1675—1676 гг. Несмотря на совет Лейбница, родные не опубликовали рукопись, а со временем она была утеряна.

В качестве примера приведем одно из самых простых, но и самых важных следствий из теоремы Паскаля. Коническое сечение однозначно определяется любыми



своими пятью точками. Действительно, пусть {1, 2, 3, 4, 5} — точки конического сечения и m — произвольная прямая, проходящая через (5). Тогда на m существует единственная точка (6) конического сечения, отличная от (5). В обозначениях теоремы Паскаля точка P является точкой пересечения (1, 2) и (4, 5), Q — точка пересечения (2, 3) и m, R — точка пересечения (3, 4) и PQ, а тогда (6) определится как точка пересечения (1, R) и m.

«ПАСКАЛЕВО КОЛЕСО». 2 января 1640 г. семья Паскалей переезжает в Руан, где Этьен Паскаль получает место интенданта провинции, фактически ведающего всеми делами при губернаторе.

Этому назначению предшествовали любопытные события. Э. Паскаль принял активное участие в выступлениях парижских рантьеров, за что ему грозило заточение в Бастилию. Он был вынужден скрываться, но в это время заболела оспой Жаклина, и отец, несмотря на страшную угрозу, навещал ее. Жаклина выздоровела и даже участвовала в спектакле, на котором присутствовал кардинал Ришелье. По просьбе юной актрисы кардинал простил ее отца, но одновременно назначил его на должность. Бывший смутьян должен был проводить в жизнь политику кардинала (читателей «Трех мушкетеров» это коварство, наверное, не удивит).

Теперь у Этьена Паскаля было очень много счетной работы, в которой ему постоянно помогает сын. В конце 1640 г. Блезу Паскалю приходит мысль построить машину, чтобы освободить ум от расчетов «с помощью пера и жетонов». Основной замысел возник быстро и оставался неизменным на протяжении всей работы: «...каждое колесо или стержень некоторого разряда, совершая движение на десять арифметических цифр, заставляет двигаться следующее только на одну цифру». Однако блестящая идея — это только первый шаг. Несравненно больших сил потребовала ее реализация. Позднее в «Предуведомлении» тому, кто «будет иметь любознательность видеть арифметическую машину и пользоваться ею», Блез Паскаль скромно пишет: «Я не экономил ни время, ни труд, ни средства, чтобы довести ее до состояния быть тебе полезной». За этими словами стояло пять лет напряженной работы, которая привела к созданию машины («паскалева колеса», как говорили современники), надежно, хотя и довольно медленно, производившей четыре действия над пятизначными числами. Паскаль изотовил около пяти-

десяти экземпляров машины; вот только перечень материалов, которые он перепробовал: дерево, слоновая кость, эбеновое дерево, латунь, медь. Он потратил много сил на поиски лучших ремесленников, владеющих «токарным станком, напильником и молотком», и ему много раз казалось, что они не в состоянии достичь необходимой точности. Тщательно продумывается система испытаний, в их число включается перевозка на 250 лье. Паскаль не забывает и о рекламе: он заручается поддержкой канцлера Сегье, добивается «королевских привилегий» (нечто вроде патента), много раз демонстрирует машину в салонах и даже посылает экземпляр шведской королеве Христине. Наконец, налаживается производство; точное число произведенных машин неизвестно, но до настоящего времени сохранилось восемь экземпляров.

Поражает, как блестяще умел делать Паскаль самые разные вещи. Сравнительно недавно стало известно, что в 1623 г. Шиккард, друг Кеплера, построил арифметическую машину, однако машина Паскаля была гораздо совершенней.

«БОЯЗНЬ ПУСТОТЫ» И «ВЕЛИКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТЕЙ». В конце 1646 г. до Руана докатилась молва об удивительных «итальянских опытах с пустотой». Вопрос о существовании пустоты в природе волновал еще древних греков; в их взглядах на этот вопрос проявилось присущее древнегреческой философии разнообразие точек зрения: Эпикур считал, что пустота может существовать и действительно существует; Герон — что она может быть получена искусственно, Эмпедокл — что ее нет и ей неоткуда взяться, и, наконец Аристотель утверждал, что «природа боится пустоты». В средние века ситуация упростилась, поскольку истинность учения Аристотеля была установлена практически в законодательном порядке (еще в XVII веке за выступление против Аристотеля во Франции можно было попасть на каторгу).

Воспоминания о «боязни пустоты» еще долго сохранялись, о чем свидетельствует следующий пассаж из неоконченного произведения Ф. М. Достоевского «Крокодил»: «Как же достигнуть устройством крокодила, чтоб он глотал людей? Ответ еще яснее: устроив его пустым. Давно уже решено физикой, что природа не терпит пустоты. Подобно тому и внутренность крокодила должна именно быть пустою, чтобы не терпеть пустоты, а следственно

беспрерывно глотать и наполняться всем, что только есть под рукою».

Классический пример «боязни пустоты» демонстрирует вода, поднимающаяся вслед за поршнем, не давая образоваться пустому пространству. И вдруг с этим примером произошел казус. При сооружении фонтанов во Флоренции обнаружилось, что вода «не желает» подниматься выше 34 футов (10,3 метра). Недоумевающие строители обратились за помощью к престарелому Галилею, который сострил, что, вероятно, природа перестает бояться пустоты на высоте, превышающей 34 фута, но все же предложил разобраться в странном явлении своим ученикам Торричелли и Вивиани. Вероятно, Торричелли (а, возможно, и самому Галилею) принадлежит мысль, что высота, на которую может подняться жидкость в насосе, обратно пропорциональна ее удельному весу. В частности, ртуть должна подняться на высоту в 13,3 раза меньшую, чем вода, т. е. на 76 см. Опыт приобрел масштабы, более благоприятные для лабораторных условий, и был проведен Вивиани по инициативе Торричелли. Этот опыт хорошо известен, но все же напомним, что запаянная с одного конца метровая стеклянная трубка заполняется ртутью, открытый конец зажимается пальцем, после чего трубка переворачивается и опускается в чашку с ртутью. Если отнять палец, то уровень ртути в трубке упадет до 76 см. Торричелли делает два утверждения: во-первых, пространство над ртутью в трубке пусто (потом его назовут «торричеллиевой пустотой»), а, во-вторых, ртуть из трубки не выливается полностью, поскольку этому препятствует столб воздуха, давящий на поверхность ртути в чашке. Приняв эти гипотезы, можно все объяснить, но можно получить объяснение и введя специальные, довольно сложно действующие силы, препятствующие образованию вакуума. Принять гипотезы Торричелли было непросто. Лишь немногие из его современников смирились с тем, что воздух имеет вес; некоторые, исходя из этого, поверили в возможность получения вакуума, но поверить, что легчайший воздух удерживает в трубке тяжелую ртуть, было почти невозможно. Упомянем, что Галилей пытался объяснить этот эффект свойствами самой жидкости, а Декарт утверждал, что кажущийся вакуум всегда заполнен «тончайшей материей».

Паскаль с увлечением повторяет итальянские опыты, придумав много остроумных усовершенствований. Восемь

таких опытов описаны в трактате, опубликованном в 1647 г. Он не ограничивается опытами с ртутью, а экспериментирует с водой, маслом, красным вином, для чего ему потребовались бочки вместо чашек и трубки длиной около 15 м. Эффектные опыты выносятся на улицы Руана, радуя его жителей. (До сих пор гравюры с винным барометром любят воспроизводить в учебниках физики.)

На первых порах Паскаля более всего интересует вопрос о доказательстве того, что пространство над ртутью пусто. Была распространена точка зрения, что кажущийся вакуум заполняет материя, «не имеющая свойств» (вспоминается подпоручик Киже из повести Ю. Н. Тынянова, «не имеющий фигуры»). Доказать отсутствие такой материи просто невозможно. Четкие высказывания Паскаля очень важны в плане постановки более широкой проблемы о характере доказательств в физике. Он пишет: «После того как я доказал, что ни одна из материй, которые доступны нашим чувствам и которые нам известны, не заполняет это пространство, кажущееся пустым, мое мнение, пока мне не докажут существование какой-то материи, заполняющей его, — что это пространство в самом деле пусто и лишено всякой материи». Менее академические высказывания содержатся в письме ученому-иезуиту Ноэлю: «Но у нас больше оснований отрицать ее (тончайшей материи. — *С. Г.*) существование, потому что нельзя ее доказать, чем верить в нее по той единственной причине, что нельзя доказать, что ее нет». Итак, необходимо доказывать существование объекта и нельзя требовать доказательства его отсутствия (это ассоциируется с юридическим принципом, состоящим в том, что суд должен доказать виновность и не вправе требовать от обвиняемого доказательств невиновности).

На родине Паскаля в Клермоне жила в это время старшая сестра Б. Паскаля Жильберта; ее муж Флорен Перье, служа в суде, свободное время посвящал наукам. 15 ноября 1647 г. Паскаль отправляет Перье письмо, в котором просит сравнить уровни ртути в трубке Торричелли у подножия и на вершине горы Пюи-де-Дом: «Вы понимаете, если бы высота ртути на вершине горы оказалась меньшей, чем у подошвы (я так думаю по многим основаниям, хотя все, писавшие об этом предмете, придерживаются другого мнения), то из этого можно было бы заключить, что единственная причина явления — тяжесть воздуха, а не пресловутый horror vacui (боязнь пустоты —

С. Г.). Ясно, в самом деле, что внизу горы воздух должен быть сгущеннее, чем наверху, между тем, как нелепо предполагать в нем больший страх пустоты у подножия, нежели на вершине». Эксперимент по разным причинам откладывался и состоялся лишь 19 сентября 1648 г. в присутствии пяти «уважаемых жителей Клермона». В конце года вышла брошюра, в которую были включены письмо Паскаля и ответ Перье с очень скрупулезным описанием опыта. При высоте горы около 1,5 км разница уровней ртути составила 82,5 мм; это «повергло участников эксперимента в восхищение и удивление» и, вероятно, было неожиданным для Паскаля. Предположить существование предварительных оценок невозможно, а иллюзия легкости воздуха была очень велика. Результат был столь ощутим, что уже одному из участников эксперимента аббату де ла Мару приходит в голову мысль, что результаты может дать эксперимент в куда более скромных масштабах. И, действительно, разница уровней ртути у основания и наверху собора Нотр-Дам-де-Клермон, имеющего высоту 39 м, составила 4,5 мм. Если бы Паскаль допускал такую возможность, он не стал бы ожидать десять месяцев. Получив известие от Перье, он повторяет эксперименты на самых высоких зданиях Парижа, получая те же результаты. Паскаль назвал этот эксперимент «великим экспериментом равновесия жидкостей» (это название может вызвать удивление, поскольку речь идет о равновесии воздуха и ртути и тем самым воздух назван жидкостью). В этой истории есть одно запутанное место. Декарт утверждал, что именно он подсказал идею эксперимента. Вероятно, здесь произошло какое-то недоразумение, так как трудно предположить, что Паскаль сознательно не ссылался на Декарта.

Паскаль продолжает экспериментировать, используя наряду с барометрическими трубками большие сифоны (подбирая короткую трубку так, чтобы сифон не работал); он описывает разницу в результатах экспериментов для различных местностей Франции (Париж, Овернь, Дьепп). Паскаль знает, что барометр можно использовать как высотомер (альтиметр), но вместе с тем понимает, что зависимость между уровнем ртути и высотой местности — не простая и ее не удается пока обнаружить. Он замечает, что показания барометра в одной и той же местности зависят от погоды; сегодня предсказание погоды — основная функция барометра (прибор для измерения «измене-

ний воздуха» хотел построить Торричелли). А однажды Паскаль решил вычислить общий вес атмосферного воздуха («мне хотелось доставить себе это удовольствие и я провел расчет»). Получилось 8,5 триллиона французских фунтов.

Мы не имеем возможности останавливаться на других опытах Паскаля о равновесии жидкостей и газов, поставивших его наряду с Галилеем и Симоном Стевином (1548—1620) в число создателей классической гидростатики. Здесь и знаменитый закон Паскаля, и идея гидравлического пресса, и существенное развитие принципа возможных перемещений. Одновременно он придумывает, например, зрелищно эффектные опыты, иллюстрирующие открытый Стевином парадоксальный факт, что давление жидкости на дно сосуда зависит не от формы сосуда, а лишь от уровня жидкости: в одном из опытом наглядно видно, что требуется груз в 100 фунтов, чтобы уравновесить давление на дно сосуда воды весом в одну унцию; в процессе опыта вода замораживается, и тогда хватает груза в одну унцию. Паскаль демонстрирует своеобразный педагогический талант. Было бы хорошо, если бы и сегодня школьника удивляли те факты, которые поражали Паскаля и его современников.

Физические исследования Паскаля были прерваны в 1653 г. в результате трагических происшествий, о которых мы расскажем ниже.

«МАТЕМАТИКА СЛУЧАЯ». В январе 1646 г. Этьен Паскаль во время гололеда вывихнул бедро, и это едва не стоило ему жизни. Реальность потери отца произвела ужасное впечатление на сына, и это прежде всего сказалось на его здоровье: головные боли стали невыносимыми, он мог передвигаться лишь на костылях и был в состоянии проглотить только несколько капель теплой жидкости. От врачей-костоправов, лечивших отца, Б. Паскаль узнал об учении Корнелия Янсения (1585—1638), которое в то время распространялось во Франции, противостоя иезуитизму (последний существовал к тому времени примерно сто лет). На Паскаля произвел наибольшее впечатление побочный элемент в учении Янсения: допустимо ли бесконтрольное занятие наукой, стремление все познать, все разгадать, связанное прежде всего с неограниченной пытливостью человеческого ума или, как писал Янсений, с «похотью ума». Паскаль воспринимает свою научную деятельность как греховную, а выпавшие

на его долю беды — как кару за этот грех. Это событие сам Паскаль назвал «первым обращением». Он решает отказаться от дел «греховных и противных богу». Однако это ему не удается: мы уже забежали вперед и знаем, что вскоре он каждую минуту, которую ему оставляет болезнь, посвятит физике.

Здоровье несколько улучшается, и с Паскалем происходят вещи, мало понятные для его близких. Он мужественно переносит в 1651 г. смерть отца, и его рационалистические, внешне холодные рассуждения о роли отца в его жизни резко контрастируют с реакцией пятилетней давности (он пишет, что теперь присутствие отца не является «абсолютно необходимым», что он нуждался бы в нем еще десять лет, хотя присутствие отца было бы полезно всю жизнь).

А потом у Паскаля появились знакомые, мало подходящие для янсениста. Он путешествует в свите герцога де Роанне и знакомится там с кавалером де Мере, человеком высокообразованным и умным, но несколько самоуверенным и поверхностным. С де Мере охотно общались великие современники, и только поэтому его имя сохранилось в истории. При этом он умудрился писать Паскалю письма с поучениями по разным вопросам, не исключая и математики. Сейчас все это выглядит наивным и, по словам Сент-Бева, «такого письма вполне достаточно, чтобы погубить человека, его писавшего, во мнении потомства». Тем не менее довольно длительное время Паскаль охотно общался с де Мере, он оказался способным учеником кавалера по части светской жизни.

Мы переходим к истории о том, как «задача, поставленная перед суровым янсенистом светским человеком, стала источником теории вероятностей» (Пуассон). Собственно, задач было две и, как выяснили историки математики, обе они были известны задолго до де Мере. Первый вопрос состоит в том, сколько раз нужно кинуть две игральные кости, чтобы вероятность того, что хотя бы один раз выпадет две шестерки, превысит вероятность того, что две шестерки не выпадут ни разу. Де Мере и сам решил эту задачу, но, к сожалению,... двумя способами, давшими разные ответы: 24 и 25 бросков. Будучи уверенным в одинаковой достоверности обоих способов, де Мере обрушивается на «непостоянство» математики. Паскаль, убедившись в том, что правильный ответ — 25, даже не приводит решения. Основные его усилия были

направлены на решение второй задачи — задачи «о справедливом разделе ставок». Происходит игра, все участники (их число может быть больше двух) вначале делают ставки в «банк»; игра разбивается на несколько партий, и для выигрыша банка надо выиграть некоторое фиксированное число партий. Вопрос состоит в том, как следует справедливо разделить банк между игроками в зависимости от числа выигранных ими партий, если игра не доведена до конца (никто не выиграл числа партий, достаточного для получения банка). По словам Паскаля, «де Мере... даже не смог подступиться к этому вопросу...».

Никто из окружения Паскаля не сумел понять предложенное им решение, но все же достойный собеседник нашелся. Между 29 июля и 27 октября Паскаль обменивается письмами с Ферма (при посредничестве Пьера Каркави, продолжавшего деятельность Мерсенна). Часто считают, что в этой переписке родилась теория вероятностей. Ферма решает задачу о ставках иначе, чем Паскаль, и первоначально возникают некоторые разногласия. Но в последнем письме Паскаль констатирует: «Наше взаимопонимание полностью восстановлено», и далее: «Как я вижу, истина одна и в Тулузе, и в Париже». Он счастлив тем, что нашел великого единомышленника: «Я и впредь хотел бы по мере возможностей делиться с вами своими мыслями».

В том же 1654 г. Паскаль опубликовал одну из самых популярных своих работ «Трактат об арифметическом треугольнике». Теперь его называют треугольником Паскаля, хотя оказалось, что он был известен еще в Древней Индии, а в XVI веке был переоткрыт Штифелем. В основе лежит простой способ вычислять число сочетаний C_n^k индукцией по n (по формуле $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$). В этом трактате впервые принцип математической индукции, который фактически применялся и раньше, формулируется в привычной для нас форме.

В 1654 г. Паскаль в послании «Знаменитейшей Парижской математической академии» перечисляет работы, которые готовятся им к публикации, и в их числе трактат, который «может по праву претендовать на ошеломляющее название «Математика случая»».

ЛУИ ДЕ МОНТАЛЬТ. Вскоре после смерти отца Жаклина Паскаль уходит в монастырь, и Блез Паскаль лишается присутствия очень близкого человека. Какое-то время

его привлекает возможность жить, как живет большинство людей: он подумывает о том, чтобы купить должность в суде и жениться. Но этим планам не суждено было сбыться. В середине ноября 1654 г., когда Паскаль переезжал мост, передняя пара лошадей сорвалась, а коляска чудом задержалась у края пропасти. С тех пор, по словам Ламетри, «в обществе или за столом Паскалю всегда была необходима загородка из стульев или сосед слева, чтобы не видеть страшной пропасти, в которую он боялся упасть, хотя знал цену подобным иллюзиям». 23 ноября происходит необычайный нервный припадок. Находясь в состоянии экстаза, Паскаль записывает на клочке бумаги мысли, которые проносятся в его голове: «Бог Авраама, бог Исаака, бог Иакова, но не бог философов и ученых...». Позднее он перенес эту запись на пергамент; после его смерти обе бумаги обнаружили зашитыми в его камзоле. Это событие называют «вторым обращением» Паскаля.

С этого дня, по свидетельству Жаклины, Паскаль чувствует «огромное презрение к свету и почти непреодолимое отвращение ко всем принадлежащим ему вещам». Он прерывает занятия и с начала 1655 г. поселяется в монастыре Пор-Рояль (оплоте янсенистов), добровольно ведя монашеский образ жизни.

В это время Паскаль пишет «Письма к провинциалу» — одно из величайших произведений французской литературы. «Письма» содержали критику иезуитов. Они издавались отдельными выпусками — «письмами», — начиная с 23 января 1656 г. до 23 марта 1657 г. (всего 18 писем). Автора — «друга провинциала» — звали Луи де Монтальтом. Слово «гора» в этом псевдониме (la montagne) уверенно связывают с воспоминаниями об опытах на Пюи-де-Дом. Письма читали по всей Франции, иезуиты были в бешенстве, но не могли достойно ответить (королевский духовник отец Анна́ предлагал 15 раз — по числу написанных к тому времени писем — сказать, что Монтальт — еретик). За автором, оказавшимся смелым и талантливым конспиратором, охотился судебный следователь, которого контролировал сам канцлер Сегье, когда-то покровительствовавший создателю арифметической машины (по свидетельству современника, уже после двух писем канцлеру «семь раз отворяли кровь»), и, наконец, в 1660 г. государственный совет постановил сжечь книгу «мнимого Монтальта». Но это было по существу символическим мероприятием. Тактика Паскаля дала по-

разительные результаты. «Делались попытки самыми различными способами показать иезуитов отвратительными; Паскаль сделал больше: он показал их смешными»,— так оценивает «Письма» Вольтер. «Шедевром шутливой логики» назвал их Бальзак, «кладом для комедиографа» — Расин. Образы Паскаля предвещали появление мольеровского Тартюфа.

Работая над «Письмами», Паскаль ясно понимал, что правильное владение логикой важно не только математикам. В Пор-Рояле много думали о системе образования, и существовали даже специальные янсенистские «маленькие школы». Паскаль активно включился в эти размышления, сделав, например, интересные замечания о первоначальном обучении грамоте (он считал, что нельзя начинать с изучения алфавита). В 1667 г. посмертно вышли два фрагмента работы Паскаля «Разум геометра и искусство убеждения». Это сочинение не является научной работой; его назначение более скромно — быть введением к учебнику геометрии для янсенистских школ. Многие высказывания Паскаля производят очень сильное впечатление, и не верится, что такая четкость формулировок была достижима в середине XVII века. Вот одно из них: «Все должно быть доказано, и при доказательстве нельзя использовать ничего кроме аксиом и ранее доказанных теорем. Никогда нельзя злоупотреблять тем обстоятельством, что разные вещи нередко обозначаются одним и тем же словом, поэтому определяемое слово должно быть мысленно заменено определением». В другом месте Паскаль замечает, что обязательно существуют неопределяемые понятия. Исходя из этих высказываний, Жак Адамар (1865—1963) считал, что Паскалю оставался маленький шаг, чтобы произвести «глубокую революцию во всей логике — революцию, которую Паскаль мог бы осуществить тремя веками раньше, чем это действительно случилось». Вероятно, здесь имеется в виду тот взгляд на аксиоматические теории, который сложился после открытия неевклидовой геометрии.

Удивительные события не переставали происходить в жизни Паскаля. В страшный для него 1654 год у его любимой племянницы Маргариты появилась опухоль в уголке глаза. Врачи были бессильны помочь девочке, состояние которой непрерывно ухудшалось. В марте 1657 г. к глазу приложили хранившийся в Пор-Рояле «святой терний» (колючка, по преданию, снятая с тернового венца

Христа) и... опухоль пошла на убыль. «Чудо святого терния», по словам Жильберты Перье (матери Маргариты), «было засвидетельствовано знаменитыми врачами и искуснейшими хирургами и легализовано торжественным постановлением церкви». Слухи о случившемся произвели настолько сильное впечатление на церковь, что янсенистский монастырь в очередной раз избежал закрытия. Что касается Паскаля, то «радость его была столь огромна, что ум его отдался этому чувству всецело, и у него явилось много удивительных мыслей о чудесах» (Жильберта Перье). Великий ученый поверил в чудо! Он писал: «Невозможно разумно рассуждать против чудес». Позднее он даже попытался дать определение чуда: «Чудо — это действие, которое превышает естественную силу способов, при нем употребляющихся...» Потом были предприняты многочисленные попытки рационально объяснить случившееся (одно из объяснений: причиной опухоли была металлическая соринка, а терний обладал магнитным свойством). С тех пор на печати Паскаля был изображен глаз, окруженный терновым венцом.

АМОС ДЕТТОНВИЛЛЬ. «Я провел много времени в изучении отвлеченных наук; недостаток сообщаемых ими сведений отбил у меня охоту к ним. Когда я начал изучение человека, я увидел, что эти отвлечения ему несвойственны и что я еще больше запутался, углубляясь в них, чем другие, не зная их». Эти слова Паскаля характеризуют его настроение в последние годы жизни. И все же полтора года из них он занимался математикой...

Началось это весной 1658 г. как-то ночью, когда во время страшного приступа зубной боли Паскаль вспомнил одну нерешенную задачу Мерсенна про циклоиду. Он замечает, что напряженные размышления отвлекают от боли. К утру он уже доказал целый ряд результатов о циклоиде и... исцелился от зубной боли. Поначалу Паскаль считает случившееся грехом и не собирается записывать полученные результаты. Позднее, под влиянием герцога де Роанне, он изменяет свое решение; в течение восьми дней, по свидетельству Жильберты Перье, «он только и делал, что писал, пока рука могла писать». А затем в июне 1658 г. Паскаль, как это часто делалось тогда, организовал конкурс, предложив крупнейшим математикам решить шесть задач про циклоиду. Наибольших успехов добились Христиан Гюйгенс (1629—1695), решивший четыре задачи, и Джон Валлис (1616—

1703), у которого с некоторыми пробелами были решены все задачи. Но наилучшей была признана работа неизвестного Амоса Деттонвилля. Гюйгенс признавал позднее, что «эта работа выполнена столь тонко, что к ней нельзя ничего добавить». Заметим, что «Amos Dettonville» состоит из тех же букв, что «Louis de Montalte». Так придуман новый псевдоним Паскаля *). На премиальные 60 пистолей труды Деттонвилля были изданы.

Теперь несколько слов о работе. Мы уже говорили о циклоиде (см. с. 102). Эту кривую описывает точка круга, катящегося по прямой без скольжения. Первоначальный интерес к циклоиде стимулировался тем, что ряд интересных задач для нее удалось решить элементарно. Например, по теореме Торричелли, чтобы провести касательную к циклоиде в точке A, нужно взять соответствующее этой точке положение производящего (катящегося) круга и соединить его верхнюю точку B с A. Вот еще одна теорема, которую Торричелли и Вивиани приписывают Галилею: площадь криволинейной фигуры, ограниченной аркой циклоиды, равна утроенной площади производящего круга.

Задачи, рассмотренные Паскалем, уже не допускают элементарных решений (площадь и центр тяжести произвольного сегмента циклоиды, объемы соответствующих тел вращения и т. д.). На этих задачах Паскаль разработал по существу все, что необходимо для построения дифференциального и интегрального исчисления в общем виде. Лейбниц, который делит с Ньютоном славу создателя этой теории, пишет, что, когда, по совету Гюйгенса, он ознакомился с работами Паскаля, его «озарило новым светом», он удивился, насколько был близок Паскаль к построению общей теории, и неожиданно остановился, будто «на его глазах была пелена».

Для работ, предвосхищавших появление дифференциального и интегрального исчисления, было характерно то, что интуиция их авторов сильно опережала возможности провести строгие доказательства; математический язык был недостаточно развит, чтобы перенести на бумагу ход мыслей. Выход был найден позднее путем введения

*) Еще одна анаграмма этого имени «Соломон де Тульти» (Salomon de Tulti) появилась в последнем произведении Паскаля «Мысли» среди авторов, которым он следует (наряду с Эпиктетом и Монтенем). Паскалеведы немало потрудились в поисках загадочного философа, пока догадались, в чем дело.

новых понятий и специальной символики. Паскаль не прибегал ни к какой символике, но он так виртуозно владел языком, что временами кажется, что у него в этом просто не было потребности. Приведем высказывание Н. Бурбаки: «Валлис в 1655 г. и Паскаль в 1658 г. составили каждый для своего употребления языки алгебраического характера, в которых, не записывая ни единой формулы, они дают формулировки, которые можно немедленно, как только будет понят их механизм, записать в формулах интегрального исчисления. Язык Паскаля особенно ясен и точен; и если не всегда понятно, почему он отказался от применения алгебраических обозначений не только Декарта, но и Виета, все же нельзя не восхищаться его мастерством, которое могло проявиться лишь на основе совершенного владения языком». Хочется сказать, что здесь Паскаль-писатель помог Паскалю-математику.

«МЫСЛИ». После середины 1659 г. Паскаль уже не возвращался ни к физике, ни к математике. В конце мая 1660 г. он в последний раз приезжает в родной Клермон; Ферма приглашает его заехать в Тулузу. Горько читать ответное письмо Паскаля от 10 августа. Вот несколько выдержек из него: «...в настоящее время я занимаюсь вещами, столь далекими от геометрии, что с трудом вспоминаю о геометрии... хотя Вы тот человек, кого во всей Европе я считаю самым крупным математиком, не это качество привлекает меня; но я нахожу столько ума и прямоты в Вашей беседе и поэтому ищу общения с Вами... я нахожу математику наиболее возвышенным занятием для ума, но в то же время я знаю, что она столь бесполезна, что я делаю малое различие между человеком, который только геометр, и искусным ремесленником. Поэтому я называю ее самым красивым ремеслом на свете, но, в конце концов, это лишь ремесло. И я часто говорил, что она хороша, чтобы испытать свою силу, но не для приложения этой силы...». И, наконец, строчки, говорящие о физическом состоянии Паскаля: «Я так слаб, что не могу ни ходить без палки, ни ездить верхом. Я не могу даже ехать в экипаже более двух или трех лье...». В декабре 1660 г. Гюйгенс дважды посетил Паскаля и нашел его глубоким стариком (Паскалю было 37 лет), который не в состоянии вести беседу.

Паскаль решает разобраться в самых сокровенных тайнах человеческого существования, в смысле жизни. Он растерян: «Я не знаю, кто меня послал в мир, я не знаю,

что такое мир, что такое я. Я в ужасном и полнейшем неведении... Как я не знаю, откуда я пришел, так же точно не знаю, куда уйду... Вот мое положение: оно полно ничтожности, слабости, мрака». Его занятия естественными науками не могут помочь ответить на возникшие вопросы: «Знание физики не утешает меня в незнании начал нравственности в момент страданий». Когда-то Паскаль писал: «Нет нигде настоящих доказательств, кроме как в геометрии и там, где ей подражают». Но на сей раз геометрия не может быть образцом (хотя не мало людей пыталось строить математическую теорию нравственности!). А. С. Пушкин писал не без иронии: ««Все что превышает геометрию, превышает нас», сказал Паскаль. И вследствие того написал свои философские мысли!». Но Паскаль не видит здесь противоречия. Он искал истину на другом пути: «Я одобряю только тех, которые ищут с болью в сердце». Паскаль пишет: «Все наше достоинство заключено в мысли. Не пространство и не время, которых мы не можем заполнить, возвышают нас, а именно она, наша мысль. Будем же учиться хорошо мыслить: вот основной принцип морали». Он неоднократно возвращается к этому вопросу: «Человек, по-видимому, создан, чтобы мыслить; в этом все его достоинство, вся его заслуга; вся его обязанность в том, чтобы мыслить как должно... А о чем думают люди?... о том, как бы потанцевать, поиграть на лютне, попеть, написать стихи, покататься на карусели и т. д., как бы построиться, сделаться королем... Все достоинство человека в его мысли. Но что такое эта мысль? Как она глупа!» Но хорошо мыслить — небезопасно: «Крайнюю степень ума обвиняют в безумии точно так же, как полное отсутствие ума. Хороша только посредственность». Паскаль много думает о роли религии в жизни человека. Почти нет вопроса, мимо которого он проходит. Он продумывает человеческую историю, подчеркивает роль случая в ней («Если бы нос Клеопатры был бы короче, вся поверхность земли приняла бы другой вид»), повествует о страшных сторонах человеческой жизни («Может ли быть что-нибудь нелепее факта, что такой-то человек имеет право убить меня, потому что он живет по ту сторону реки или моря и потому что его правительство в ссоре с моим, хотя я никакой не имею с ним ссоры»). Высказывания Паскаля по самым разным вопросам необычайно проницательны. Его мысли о государстве ценил Наполеон, который, находясь в изгнании

на острове св. Елены, говорил, что «сделал бы Паскаля сенатором».

Паскаль не окончил главную книгу жизни. Оставшиеся материалы были изданы посмертно в разных вариантах, под разными названиями. Чаще всего книгу называют «Мысли».

Популярность этой книги была необычайной. Мы ограничимся тем, что подчеркнем ее влияние на деятелей русской культуры. Не все принимали ее. И. С. Тургенев называл «Мысли» «самой ужасной, самой несносной книгой из всех когда-либо напечатанных», но писал, что «...никогда еще никто не подчеркивал того, что подчеркивает Паскаль: его тоска, его проклятия ужасны. В сравнении с ним Байрон — розовая водица. Но какая глубина, какая ясность — какое величие!... Какой свободный сильный, дерзкий и могучий язык!...». Н. Г. Чернышевский писал о Паскале: «...погибать от избытка умственных сил — какая славная погибель...». Полемика с Паскалем прошла через всю жизнь Ф. М. Достоевского. Для Л. Н. Толстого Паскаль был одним из самых почитаемых мыслителей. Имя Паскаля постоянно встречается в составленном им «Круге чтения» (около 200 раз). Паскаль для Л. Н. Толстого писатель, «пишущий кровью сердца».

Блез Паскаль скончался 19 августа 1662 г. 21 августа в церкви Сент-Этьен-дю-Мон был составлен «Похоронный акт»: «В понедельник 21 августа 1662 г. был похоронен в церкви покойный Блез Паскаль, при жизни стремянный, сын покойного Этьена Паскаля, государственного советника и президента палаты сборов в Клермон-Ферране. 50 священников, получено 20 франков».

КОРОЛЬ МАТЕМАТИКОВ

> Не считать ничего сделанным, если еще кое-что осталось сделать.
>
> *Гаусс*

В 1854 г. здоровье тайного советника Гаусса, как его именовали коллеги по Геттингенскому университету, решительно ухудшилось. Не могло быть и речи о продолжавшихся в течение двадцати лет ежедневных прогулках от Обсерватории до Литературного музея. Профессора, приближавшегося к восьмидесятилетнему рубежу, удалось уговорить обратиться к врачу! Летом ему стало лучше и он даже присутствовал на открытии железной дороги Ганновер — Геттинген. В январе 1855 г. Гаусс соглашается позировать художнику Геземану для медальона. По заказу Ганноверского двора уже после смерти ученого в феврале 1855 г. по этому медальону была изготовлена медаль. На медали под барельефом Гаусса было написано: Mathematicorum princeps (Король математиков). История всякого настоящего короля должна начинаться с детства, овеянного легендами. Гаусс в этом смысле не был исключением.

I. ДЕБЮТ ГАУССА

«Упорство, с которым Гаусс следовал по избранному им пути, бурный юношеский натиск, с которым он каждый раз, не взирая ни на что, преодолевал самые крутые подъемы, ведущие к цели, все эти трудные испытания закаляли его силы и делали его способным, после победы над препятствиями, уже устраненными другими, неудержимо идти вперед, опережая их. К этой хвале творческой самодеятельности я должен присоединить другое: похвалу юности. Я этим хочу сказать только то, что развитие математического гения подчиняется тем же законам, что и развитие всякой другой творческой способности. Для гениально одаренной личности годы юности, период, когда только что завершается процесс физического роста, являются эпохой великих, в изобилии сменяющих друг друга



Карл Фридрих Гаусс, 1777—1855.

откровений; именно в эти гогы гениально одаренный дух создает те новые, ему одному принадлежащие ценности, которые им будут впоследствии преподнесены миру» (Ф. Клейн).

БРАУНШВЕЙГ, 1777—1795 гг. Гаусс не получил свой титул по наследству, хотя его отец Гергард Дидерих не был вовсе чужд математике. Мастер на все руки, прежде всего фонтанный мастер, но также и садовник, как его отец, Гергард Дидерих был известен своими успехами в счетном ремесле. Его услугами пользовались купцы во время ярмарок в Брауншвейге и даже Лейпциге, а еще он имел постоянный заработок в самой большой похоронной кассе Брауншвейга (место, которое он передал по наследству сыну от первого брака Георгу — отставному солдату).

Карл Фридрих родился 30 апреля 1777 г. в доме № 1550, что стоял на канале Венденгребене в Брауншвейге. По мнению биографов, он унаследовал от родных отца крепкое здоровье, а от родных матери яркий интеллект. Ближе других был к будущему ученому дядя Фридерихс — искусный ткач, в котором, по словам племянника, «погиб прирожденный гений». Гаусс говорил о себе, что он «умел считать раньше, чем говорить». Самая ранняя математическая легенда о нем утверждает, что в три года он следил за расчетами отца с каменщиками-поденщиками и неожиданно поправил отца, причем оказался прав.

В 7 лет Карл Фридрих поступил в Екатерининскую народную школу. Поскольку считать там начинали с третьего класса, первые два года на маленького Гаусса внимания не обращали. В третий класс ученики обычно попадали в 10-летнем возрасте и учились там до конфирмации (15 лет). Учителю Бюттнеру приходилось заниматься одновременно с детьми разного возраста и разной подготовки. Поэтому он давал обычно части учеников длинные задания на вычисление, с тем чтобы иметь возмож-

ность беседовать с другими учениками. Однажды группе учеников, среди которых был Гаусс, было предложено просуммировать натуральные числа от 1 до 100. (Разные источники называют разные числа!) По мере выполнения задания ученики должны были класть на стол учителя свои грифельные доски. Порядок досок учитывался при выставлении оценок. 10-летний Гаусс положил свою доску, едва Бюттнер кончил диктовать задание. К всеобщему удивлению, лишь у него ответ был правилен. Секрет был прост: пока диктовалось задание, Гаусс успел переоткрыть формулу для суммы арифметической прогрессии! Слава о чудо-ребенке распространилась по маленькому Брауншвейгу.

В школе, где учился Гаусс, помощником учителя, основной обязанностью которого было чинить перья младшим ученикам, работал некто Бартельс, интересовавшийся математикой и имевший несколько математических книг. Гаусс и Бартельс начинают заниматься вместе; они знакомятся с биномом Ньютона, бесконечными рядами...

Как тесен мир! Через некоторое время Бартельс получит кафедру чистой математики в Казанском университете и будет учить математике Лобачевского.

В 1788 г. Гаусс переходит в гимназию. Впрочем, в ней не учат математике. Здесь изучают классические языки. Гаусс с удовольствием занимается языками и делает такие успехи, что даже не знает, кем он хочет стать — математиком или филологом.

О Гауссе узнают при дворе. В 1791 г. его представляют Карлу Вильгельму Фердинанду — герцогу Брауншвейгскому. Мальчик бывает во дворце и развлекает придворных искусством счета. Благодаря покровительству герцога Гаусс смог в октябре 1795 г. поступить в Геттингенский университет. Первое время он слушает лекции по филологии и почти не посещает лекций по математике. Но это не означает, что он не занимается математикой.

Приведем слова Феликса Клейна, замечательного математика, глубокого исследователя научного творчества Гаусса: «Естественный интерес, какое-то, я сказал бы, детское любопытство приводит впервые мальчика независимо от каких-либо внешних влияний к математическим вопросам. Первое, что его привлекает, это чистое искусство счета. Он беспрестанно считает с прямо-таки непреоборимым упорством и неутомимым прилежанием. Благодаря этим постоянным упражнениям в действиях над числами,

например, над десятичными дробями с невероятным числом знаков, он не только достигает изумительной виртуозности в технике счета, которой он отличался всю свою жизнь, но его память овладевает таким колоссальным числовым материалом, он приобретает такой богатый опыт и такую широту кругозора в области чисел, каким навряд ли обладал кто-либо до или после него. Путем наблюдений над своими числами, стало быть, индуктивным, «экспериментальным» путем он уже рано постигает общие соотношения и законы. Этот метод, стоящий в резком противоречии с современными навыками математического исследования, был, однако, довольно распространен в XVIII столетии и встречается, например, также у Эйлера... Все эти ранние, придуманные только для собственного удовольствия забавы ума являются подходами к значительной, лишь позже осознанной цели. В том-то именно и заключается подсознательная мудрость гения, что он уже при первых пробах сил, полуиграя, еще не сознавая всего значения своих действий, попадает, так сказать, своей киркой как раз в ту породу, которая в глубине своей таит золотоносную жилу. Но вот наступает 1795 год, о котором мы имеем более точные показания... С еще большей силой, чем до сих пор (все еще до геттингенского периода), его охватывает страстный интерес к целым числам. Незнакомый с какой бы то ни было литературой, он должен был все создавать себе сам. И здесь он вновь проявляет себя как незаурядный вычислитель, пролагающий пути в неизвестное. Гаусс составляет большие таблицы простых чисел, квадратичных вычетов и невычетов, выражает дроби $1/p$ от $p=1$ до $p=1000$ десятичными дробями, доводя эти вычисления до полного периода, что в иных случаях требовало несколько сотен десятичных знаков. При составлении последней таблицы Гаусс задался целью изучить зависимость периода от знаменателя p. Кто из современных исследователей пошел бы этим странным путем, чтобы получить новую теорему! Гаусса же привел к цели именно этот путь, по которому он шел с неимоверной энергией. (Он сам утверждал, что отличается от других людей только своим прилежанием.) Осенью 1795 г. Гаусс переезжает в Геттинген и прямо-таки проглатывает впервые попавшуюся в его руки литературу: Эйлера и Лагранжа».

ОТКРЫТИЕ, КОТОРОГО ЖДАЛИ ДВЕ ТЫСЯЧИ ЛЕТ. 1 июня 1796 г. в газете «Jenenser Intelligenzbllatt» появилась заметка следующего содержания:

«Всякому начинающему геометру известно, что можно геометрически (т. е. циркулем и линейкой) строить разные правильные многоугольники, а именно: треугольник, пятиугольник, пятнадцатиугольник и те, которые получаются из каждого из них путем последовательного удвоения числа его сторон. Это было известно во времена Евклида, и, как кажется, с тех пор было распространено убеждение, что дальше область элементарной геометрии не распространяется: по крайней мере, я не знаю удачной попытки распространить ее в эту сторону.

Тем более кажется мне заслуживающим внимания открытие, что, кроме этих правильных многоугольников, может быть геометрически построено множество других, например семнадцатиугольник».

Под заметкой стоит подпись: К. Ф. Гаусс из Брауншвейга, студент-математик в Геттингене.

Это первое сообщение об открытии Гаусса. Прежде чем подробно рассказывать о нем, освежим в памяти то, что «известно каждому начинающему геометру».

О ПОСТРОЕНИЯХ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ. Предполагается заданным отрезок единичной длины. Тогда при помощи циркуля и линейки можно строить новые отрезки, длины которых получаются из длин имеющихся отрезков при помощи операций: сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

Последовательно проводя эти операции, при помощи циркуля и линейки можно построить любой отрезок, длина которого выражается через единицу конечным числом операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня. Такие числа называются квадратичными иррациональностями. Можно доказать, что никакие другие отрезки построить при помощи циркуля и линейки нельзя.

Задача о построении правильного n-угольника, как легко понять, эквивалентна задаче о делении окружности радиуса 1 на n равных частей. Хорды дуг, на которые делится окружность, являются сторонами правильного n-угольника, и длина каждой из них равна $2 \sin(\pi/n)$. Следовательно, при тех n, для *которых* $\sin(\pi/n)$ *является квадратичной иррациональностью, можно построить правильные n-угольники циркулем и линейкой. Этому условию удовлетворяют, например, значения* $n=3, 4, 5, 6, 10$. Для $n=3, 4, 6$ это хорошо известно.

Покажем, что $\sin(\pi/10)$ — квадратичная иррациональность. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, угол при вершине B которого равен $\pi/5=36°$, длина AB равна 1; пусть AD — биссектриса угла A. Тогда $x=AC=$ $=AD=BD=2\sin(\pi/10)$. Имеем

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC};\ \frac{x}{1-x}=\frac{1}{x},\ x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Это число является квадратичной иррациональностью; тем самым мы можем построить сторону правильного 10-угольника.

Далее, из возможности деления окружности на p_1p_2 *равных частей следует, конечно, возможность ее деления на* p_1 *равных частей* (в частности, можно построить правильный пятиугольник). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Укажем два частных случая, когда оно все же справедливо.

1) *Из возможности деления окружности на* p *равных частей следует возможность деления на* 2^kp *равных частей для любого* k. Это следует из возможности деления любого угла пополам при помощи циркуля и линейки.

2) Если мы умеем делить окружность на p_1 равных частей и p_2 равных частей, где p_1 и p_2 взаимно просты (например, p_1, p_2 — различные простые числа), то окружность можно разделить на p_1p_2 равных частей. Это следует из того, что наибольшая общая мера углов $2\pi/p_1$ и $2\pi/p_2$ равна $2\pi/p_1p_2$, а наибольшую общую меру двух соизмеримых углов можно найти циркулем и линейкой. В частности, $2\pi/15={}^1/_2(2\pi/3-2\pi/5)$, откуда следует возможность построения правильного 15-угольника.

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛАХ. Нам нужно знать про комплексные числа совсем немного: операции над ними и геометрическую интерпретацию. Напомним, что комплексному числу $z=a+ib$ ставится в соответствие точка с координатами (a, b) и вектор с концом в этой точке и с началом в $(0,0)$. Длина вектора $r=\sqrt{a^2+b^2}$ называется модулем данного числа $|z|$. Комплексное число z можно записать в тригонометрической форме: $z=a+ib=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; угол φ называется аргументом числа z.

Сложению комплексных чисел соответствует сложение векторов; при умножении модули перемножаются, а аргументы складываются. Отсюда следует, что существует ровно n корней уравнения $z^n=1$; обычно их обозначают

через

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \qquad (1)$$

Легко показать, что концы векторов ε_k являются вершинами правильного n-угольника. Если мы докажем, что ε_k — квадратичные иррациональности (т. е. что этим свойством обладают их вещественные и мнимые части), то тем самым мы покажем, что правильный n-угольник можно построить при помощи циркуля и линейки.

ПРАВИЛЬНЫЕ n-УГОЛЬНИКИ И КОРНИ ИЗ ЕДИНИЦЫ. Преобразуем уравнение $z^n = 1$:

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1) = 0.$$

Получим два уравнения: $z = 1$ и

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет своими корнями ε_k при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. В дальнейшем мы будем иметь дело с уравнением (2).

При $n = 3$ получаем уравнение $z^2 + z + 1 = 0$. Его корни: $\varepsilon_1 = -{}^1/_2 + i\sqrt{3}/2$, $\varepsilon_2 = -{}^1/_2 - i\sqrt{3}/2$. При $n = 5$ дело обстоит сложнее, так как мы получаем уравнение четвертой степени

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0, \qquad (3)$$

имеющие четыре корня ε_1, ε_2, ε_3, ε_4. Хотя и существует формула Феррари для решения общего уравнения 4-й степени, пользоваться ею практически невозможно. В нашем случае помогает специальный вид уравнения (3). Чтобы решить его, разделим сначала уравнение (3) на z^2. Получим

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0 \text{ или } \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0.$$

Сделаем подстановку $w = z + \frac{1}{z}$:

$$w^2 + w - 1 = 0. \qquad (4)$$

Отсюда

$$w_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Далее, можно найти и ε_k из уравнений

$$z + \frac{1}{z} = w_1, \quad z + \frac{1}{z} = w_2, \qquad (5)$$

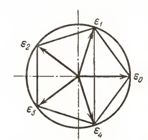
но нам это не нужно; для построения достаточно знать,

что удвоенная вещественная часть ε_1 равна

$$2\cos(2\pi/5) = \varepsilon_1 + \varepsilon_4 = \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} = w_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Из того, что w_1 — квадратичная иррациональность, следует, что ε_1 и ε_4 представляют собой квадратичные иррациональности. Для ε_2 и ε_3 рассуждаем в точности так же.

Итак, для $n=5$ решение нашей задачи удалось свести к последовательному решению двух квадратных уравнений: сначала решается уравнение (4), корнями которого являются суммы $\varepsilon_1+\varepsilon_4$ и $\varepsilon_2+\varepsilon_3$ симметричных корней уравнения (3), а затем из уравнений (5) находятся и сами корни уравнения (3).



Именно таким путем Гауссу удалось осуществить построение правильного 17-угольника: здесь тоже выделяются группы корней, суммы которых находятся последовательно из квадратных уравнений. Но как искать эти «хорошие» группы? Гаусс находит удивительный путь ответить на этот вопрос...

ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНОГО 17-УГОЛЬНИКА. «30 марта 1796 года наступает для него (Гаусса) день творческого крещения... Гаусс уже занимался с некоторого времени группировкой корней из единицы на основании своей теории «первообразных» корней. И вот однажды утром, проснувшись, он внезапно ясно и отчетливо осознал, что из его теории вытекает построение семнадцатиугольника... Это событие явилось поворотным пунктом жизни Гаусса. Он принимает решение посвятить себя не филологии, а исключительно математике» (Ф. Клейн).

Остановимся подробнее на пути, по которому двигался Гаусс. Одна из математических игр юного Гаусса состояла в следующем. Он делил 1 на различные простые числа p, выписывая последовательно десятичные знаки, с нетерпением ожидая, когда они начнут повторяться. Иногда приходилось ждать долго. Для $p=97$ повторение начиналось с 97-го знака, при $p=337$ период равен 336. Но Гаусса не смущали длинные прямолинейные вычисления, он входил при их помощи в таинственный мир чисел. Гаусс не поленился рассмотреть все $p<1000$ (ср. приведенное выше высказывание Клейна).

Известно, что Гаусс не сразу попытался доказать периодичность получающейся дроби в общем случае ($p \neq 2,5$). Но вероятно, доказательство не затруднило его. В самом деле, достаточно лишь заметить, что следить надо не за знаками частного, а за остатками! Знаки начинают повторяться после того, как на предыдущем шагу остаток равнялся 1 (почему?). Значит, надо найти такое k, что $10^k - 1$ делится на p. Так как имеется лишь конечное число возможных остатков (они заключены между 1 и $p-1$), для каких-то $k_1 > k_2$ числа 10^{k_1}, 10^{k_2} при делении на p дадут одинаковые остатки. Но тогда $10^{k_1-k_2} - 1$ делится на p (почему?).

Несколько труднее показать, что в качестве k всегда можно взять $p-1$, т. е. $10^{p-1} - 1$ при $p \neq 2,5$ всегда делится на p. Это частный случай теоремы, носящий название малой теоремы Ферма. Когда Ферма (1601—1655) открыл ее, он писал, что его «озарило ярким светом». Теперь ее переоткрыл юный Гаусс. Он всегда будет ценить это утверждение: «Эта теорема... заслуживает величайшего внимания как вследствие ее изящества, так и ввиду ее выдающейся пользы».

Гаусса интересует наименьшее k, для которого $10^k - 1$ делится на p. Такое k всегда является делителем $p-1$. Иногда оно совпадает с $p-1$ (например, для $p=7$, 17, 19, 23, 29). До сих пор неизвестно, конечно или бесконечно число таких p.

Гаусс заменяет 10 на любое число a и интересуется, когда $a^k - 1$ не делится на p при $k < p-1$ (предполагается, что a не делится на p). Такие p принято называть п е р в о о б р а з н ы м и к о р н я м и д л я a. Условие того, что p — первообразный корень, равносильно тому, что среди остатков от деления 1, a, a^2, ..., a^{p-2} на p встречаются все ненулевые остатки 1, 2, ..., $p-1$ (почему?).

Гаусс не знал тогда, что первообразными корнями интересовался уже Эйлер (1707—1783), который предполагал (но не смог доказать), что *для каждого простого числа существует хотя бы один первообразный корень*. Первое доказательство гипотезы Эйлера дал Лежандр (1752—1833); очень изящное доказательство дал Гаусс. Но это было позднее, а пока Гаусс манипулировал с конкретными примерами. Он знал, например, что *для $a=17$ число 3 является первообразным корнем*. В приводимой ниже таблице в первой строке стоят значения k, а под ними остатки от деления 3^k на 17. Обратите внимание, что во

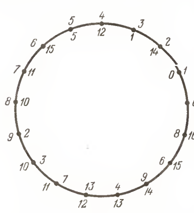
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6

второй строке встречаются все остатки от 1 до 16, что и означает первообразность 3 для 17.

Эти вычисления и легли в основу группировки корней уравнения

$$z^{16}+z^{15}+z^{14}+\ldots+z+1=0 \qquad (6)$$

(с тем, чтобы свести решение его к цепочке квадратных уравнений). Идея Гаусса состоит в том, что надо перейти к другой нумерации корней. Присвоим корню ε_k новый номер l (обозначается $\varepsilon_{[l]}$), если 3^l при делении на 17 дает остаток k. При переходе от одной нумерации к другой можно пользоваться таблицей, находя k во второй строке, а соответствующее l над ним в первой строке, но удобнее пользоваться рисунком, где по внешней стороне окружности написаны старые номера, а по внутренней — новые. Именно эта нумерация позволила Гауссу, разбивая корни (6) на группы, свести решение (6) к цепочке квадратных уравнений.



Именно, на первом шагу берутся $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$ — соответственно суммы корней $\varepsilon_{[l]}$ с четными и нечетными l (в каждой сумме по 8 корней). Эти суммы оказываются корнями квадратного уравнения с целочисленными коэффициентами. Далее, берутся суммы $\sigma_{4,0}$, $\sigma_{4,1}$, $\sigma_{4,2}$, $\sigma_{4,3}$ четверок корней $\varepsilon_{[l]}$, у которых l при делении на 4 дает фиксированный остаток. Показывается, что эти величины являются корнями квадратных уравнений, у которых коэффициенты арифметически выражаются через $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$. Наконец, образуются суммы $\sigma_{8,i}$ пар корней $\varepsilon_{[l]}$, у которых l при делении на 8 дает остаток i. Для них выписываются квадратные уравнения с коэффициентами, просто выражающимися

через $\sigma_{4,l}$. Имеем: $\sigma_{8,0}=2\cos(2\pi/17)$ и из квадратичной иррациональности $\sigma_{8,0}$ следует возможность построения правильного 17-угольника циркулем и линейкой. Поучительно записать разбиение корней на группы в старой нумерации. Согласитесь, что в таком виде угадать разбиение невозможно! Теперь реализуем только что описанный путь.

ПОДРОБНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. Мы докажем квадратичную иррациональность корней 17-й степени из единицы. Отметим, что $\varepsilon_k\varepsilon_l=\varepsilon_{k+l}$ (если $k+l\geqslant 17$, то $k+l$ заменяется остатком от его деления на 17), $\varepsilon_k=(\varepsilon_1)^k$. Прежде всего заметим, что

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{16}=\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[1]}+\ldots+\varepsilon_{[15]}=-1.$$

(В этом можно убедиться, например, рассматривая это выражение как сумму геометрической прогрессии.)

Обозначим через $\sigma_{m,r}$ сумму $\varepsilon_{[k]}$ с теми k, которые дают остаток r при делении на m. Получаем

$$\sigma_{2,0}=\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[2]}+\varepsilon_{[4]}+\ldots+\varepsilon_{[14]},$$

$$\sigma_{2,1}=\varepsilon_{[1]}+\varepsilon_{[3]}+\varepsilon_{[5]}+\ldots+\varepsilon_{[15]}.$$

Ясно, что

$$\sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}=\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[1]}+\ldots+\varepsilon_{[15]}=-1.$$

Можно показать, что

$$\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1}=4(\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[1]}+\ldots+\varepsilon_{[15]})=-4\ *).$$

Теперь, воспользовавшись теоремой Виета, мы можем составить квадратное уравнение, корнями которого будут $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$:

$$x^2+x-4=0,\quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}.$$

Чтобы различить корни, опять воспользуемся рисунком на с. 150. В каждую из сумм корни входят вместе со своими сопряженными. Ясно, что $\sigma_{2,0}>\sigma_{2,1}$ (в первом случае нужно сложить и удвоить вещественные части корней ε_1, ε_2, ε_4, ε_8, во втором — ε_3, ε_5, ε_6, ε_7). Итак,

$$\sigma_{2,0}=\frac{\sqrt{17}-1}{2},\quad \sigma_{2,1}=\frac{-\sqrt{17}-1}{2}$$

*) В этом можно убедиться, проводя непосредственные перемножения и учитывая, что $\varepsilon_k\cdot\varepsilon_l=\varepsilon_{k+l}$, причем удобно пользоваться рисунком на с. 150. Однако ниже будет указан способ, как избежать этих утомительных выкладок

Рассмотрим суммы четверок корней:

$$\sigma_{4,0}=\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[4]}+\varepsilon_{[8]}+\varepsilon_{[12]},$$
$$\sigma_{4,1}=\varepsilon_{[1]}+\varepsilon_{[5]}+\varepsilon_{[9]}+\varepsilon_{[13]},$$
$$\sigma_{4,2}=\varepsilon_{[2]}+\varepsilon_{[6]}+\varepsilon_{[10]}+\varepsilon_{[14]},$$
$$\sigma_{4,3}=\varepsilon_{[3]}+\varepsilon_{[7]}+\varepsilon_{[11]}+\varepsilon_{[15]}.$$

Имеем: $\sigma_{4,0}+\sigma_{4,2}=\sigma_{2,0}$; $\sigma_{4,1}+\sigma_{4,3}=\sigma_{2,1}$. Можно показать далее, что $\sigma_{4,0}\cdot\sigma_{4,2}=\sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}=-1$, а значит, $\sigma_{4,0}$, $\sigma_{4,2}$ — корни уравнения $x^2-\sigma_{2,0}x-1=0$. Решая это уравнение и учитывая, что $\sigma_{4,0}>\sigma_{4,2}$ (см. рис. на с. 150), получаем после несложных преобразований

$$\sigma_{4,0}={}^1/_4(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}),$$

$$\sigma_{4,2}={}^1/_4(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}}).$$

Аналогично показывается, что

$$\sigma_{4,1}={}^1/_4(-\sqrt{17}-1+\sqrt{34+2\sqrt{17}}),$$

$$\sigma_{4,3}={}^1/_4(-\sqrt{17}-1-\sqrt{34+2\sqrt{17}}).$$

Переходим к заключительному этапу. Положим

$$\sigma_{8,0}=\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[8]}=\varepsilon_1+\varepsilon_{16},$$
$$\sigma_{8,4}=\varepsilon_{[4]}+\varepsilon_{[12]}=\varepsilon_4+\varepsilon_{13}.$$

Можно было бы рассмотреть еще шесть такого рода выражений, но нам они не потребуются, так как достаточно доказать квадратичную иррациональность $\sigma_{8,0}=2\cos(2\pi/17)$, что уже позволяет построить правильный 17-угольник. Имеем $\sigma_{8,0}+\sigma_{8,4}=\sigma_{4,0}$; $\sigma_{8,0}\cdot\sigma_{8,4}=\sigma_{4,1}$; из рисунка видно, что $\sigma_{8,0}>\sigma_{8,4}$, а потому $\sigma_{8,0}$ — больший корень уравнения $x^2-\sigma_{4,0}x+\sigma_{4,1}=0$, т. е.

$$\sigma_{8,0}=2\cos(2\pi/17)={}^1/_2(\sigma_{4,0}+\sqrt{(\sigma_{4,0})^2-4\sigma_{4,1}})=$$
$$={}^1/_8(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}})+$$
$$+{}^1/_4\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}.$$

Мы несколько преобразовали непосредственно получаемое выражение для $\sqrt{(\sigma_{4,0})^2-4\sigma_{4,1}}$; однако не будем утомлять читателя воспроизведением этих простых выкладок.

Пользуясь полученной формулой для $\cos(2\pi/17)$, построение правильного 17-угольника можно выполнить при помощи элементарных правил построения выражений, являющихся квадратичными иррациональностями. Разумеется, получится весьма громоздкая процедура. В настоящее время известны довольно компактные способы построения. Один из них будет приведен (без доказательства) в приложении. В одном отношении формула для $\cos(2\pi/17)$ не оставляет сомнения. Прийти к ней в рамках традиционных геометрических идей времени Евклида невозможно. Решение Гаусса принадлежало другой эпохе в математике. Отметим, что наиболее содержательное утверждение — принципиальная возможность построения правильного 17-угольника. Сама процедура построения не столь существенна. Для доказательства возможности построения было достаточно убедиться, что на каждом шаге возникали квадратные уравнения с коэффициентами — квадратичными иррациональностями, не выписывая точных выражений (это становится особенно существенным при переходе к большим показателям).

В рассказанном решении уравнения (6) остался совершенно невыясненным вопрос о том, почему оказалось удачным разбиение корней, использующее нумерацию $\varepsilon_{[l]}$, ка́к можно было догадаться положить ее в основу решения? Сейчас мы, по существу, еще раз повторим решение, обнажив ключевую идею — исследование симметрий в множестве корней.

СИММЕТРИИ В МНОЖЕСТВЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ (6). Прежде всего, задача о корнях из единицы тесно связана с арифметикой остатков от деления на n (по модулю n). Действительно, если $\varepsilon^n = 1$, то ε^k — также корень n-й степени из единицы, причем число ε^k зависит только от остатка от деления k на n. Положим $\varepsilon = \varepsilon_1$ (см. формулу (1)); тогда ε_k есть просто ε в степени k, поэтому $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l = \varepsilon_{k+l}$, где сумма берется по модулю n (остаток от деления на n); в частности, $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_{n-k} = \varepsilon_0 = 1$.

Задача 1. Если p — простое число и δ — любой комплексный корень p-й степени из единицы, то множество δ^k, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, содержит все корни p-й степени из единицы.

Указание. Нужно доказать, что в этом случае для всякого $0 < m < p$ среди остатков от деления чисел km, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, на p содержатся все числа $0, 1, \ldots, p-1$.

Обозначим через T_k следующее преобразование (возведение в степень k): $T_k \varepsilon_l = (\varepsilon_l)^k = \varepsilon_{lk}$.

Задача 2. Докажите, что если $n = p$ — простое число, то каждое из преобразований $T_k = (k = 1, 2, \ldots, p-1)$ осуществляет взаимно однозначное отображение множества корней на себя (т. е. множество $\{T_k\varepsilon_0, T_k\varepsilon_1, \ldots, T_k\varepsilon_{p-1}\}$ совпадает с множеством всех корней $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}\}$).

Задача 1 показывает, что для всякого $1 \leqslant l \leqslant p-1$ множество $\{T_0\varepsilon_l, T_1\varepsilon_l, \ldots, T_{p-1}\varepsilon_l\}$ совпадает с множеством всех корней. Из задач 1 и 2 следует такой вывод: *составим таблицу, в которой на пересечении k-й строки и l-го столбца стоит $T_k\varepsilon_l$, $1 \leqslant k, l \leqslant p-1$; тогда в каждой строке и каждом столбце стоят все корни $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ в некотором порядке без повторений.* Отметим, что $T_{p-1}\varepsilon_l = \varepsilon_{-l} = (\varepsilon_l)^{-1}$. Тем, кто знает определение группы, советуем проверить, что преобразования T_k образуют группу относительно умножения $T_k \cdot T_l = T_{kl}$.

Далее мы рассматриваем случай $p = 17$. Будем говорить, что множество корней M инвариантно относительно преобразования T_k, если $T_k\varepsilon_l \in M$ для всех $\varepsilon_l \in M$. Относительно всех преобразований T_k инвариантно лишь множество всех корней $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{16}\}$.

Кардинальная догадка заключается в том, что *группа корней тем «лучше», чем большее число преобразований оставляет эту группу инвариантной.*

Введем для T_k еще одну нумерацию $T_{[l]}$, как это было сделано для ε_k: $T_{[l]} = T_k$, $k = 3^l$. В новых обозначениях

$$T_{[k]}\varepsilon_{[l]} = \varepsilon_{[k+l]},$$
$$T_{[m]}(T_{[k]}\varepsilon_{[l]}) = T_{[m+k]}\varepsilon_{[l]}$$

(сумму в квадратных скобках надо брать по модулю 16). Читатель, конечно, обнаружит аналогию с переходом к логарифмам, что не удивительно, так как $\varepsilon_{[l]} = \varepsilon_{3^l}$.

Задача 3. Доказать, что если некоторое множество корней инвариантно относительно некоторого $T_{[k]}$, где k нечетно, то это множество инвариантно относительно всех преобразований $T_{[m]}$, т. е. если оно не пусто, то совпадает с множеством всех корней.

Указание. Достаточно показать, что если k нечетно, то существует такое m, что km дает при делении на 16 остаток 1.

С другой стороны, имеются две группы корней, инвариантные относительно всех $T_{[k]}$ с четными k: корни $\varepsilon_{[l]}$

с четными l и корни с нечетными l. Их суммы мы обозначили через $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$.

Ясно, что $\sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}=-1$. Исследуем $\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1}$. Это произведение является суммой попарных произведений $\varepsilon_{[k]}\cdot\varepsilon_{[l]}$, где k — четное, l — нечетное, каждое из которых является некоторым корнем $\varepsilon_{[m]}$, а всего — 64 слагаемых. Мы покажем, что среди них каждый из корней $\varepsilon_{[0]}$, $\varepsilon_{[1]}$, ..., $\varepsilon_{[15]}$ встречается одинаковое число раз (четыре раза), а в результате $\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1}=-4$. Воспользуемся тем, что преобразования $T_{[k]}$ сохраняют группы корней при k четном и переводят их одна в другую при k нечетном. Каждое слагаемое в $\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1}$ однозначно представимо в виде $\varepsilon_{[m]}\varepsilon_{[m+r]}$, где $0\leqslant m\leqslant 15$, $r=1, 3, 5, 7$ (докажите!). Сгруппируем слагаемые с одинаковыми r. Полученные суммы будут иметь вид

$$\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]}+\varepsilon_{[1]}\varepsilon_{[r+1]}+\varepsilon_{[2]}\varepsilon_{[r+2]}+\ldots+\varepsilon_{[15]}\varepsilon_{[r+15]}=$$
$$=T_{[0]}(\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]})+T_{[1]}(\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]})+\ldots+T_{[15]}(\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]})=$$
$$=T_{[0]}\varepsilon_{[r]}+T_{[1]}\varepsilon_{[r]}+\ldots+T_{[15]}\varepsilon_{[r]}=\varepsilon_{[0]}+\ldots+\varepsilon_{[15]}=-1.$$

Мы воспользовались тем, что

$$T_{[m]}\varepsilon_{[k]}\cdot T_{[m]}\varepsilon_{[l]}=T_{[m]}(\varepsilon_{[k]}\varepsilon_{[l]}),$$

и уже упоминавшимися свойствами $T_{[m]}$.

Значения $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$ найдены выше.

Переходим к следующему шагу. Мы хотим ввести в рассмотрение новые, меньшие группы корней, инвариантные относительно каких-нибудь $T_{[k]}$. По аналогии с задачей 3 можно показать, что при этом k обязательно должно делиться на 4. Поэтому имеются четыре группы корней, инвариантные относительно всех $T_{[4l]}$ и меньшие, чем уже рассмотренные; запишем суммы корней в каждой группе: $\sigma_{4,0}$, $\sigma_{4,1}$, $\sigma_{4,2}$, $\sigma_{4,3}$. Мы уже отмечали, что $\sigma_{4,0}+\sigma_{4,2}=$ $=\sigma_{2,0}$; $\sigma_{4,1}+\sigma_{4,3}=\sigma_{2,1}$.

Вычислим произведение $\sigma_{4,0}\cdot\sigma_{4,2}$; оно представляется в виде суммы 16 слагаемых вида $\varepsilon_{[4k]}\varepsilon_{[4l+2]}$. Каждое такое слагаемое однозначно записывается в виде $\varepsilon_{[2m]}\varepsilon_{[2m+2r]}$, $r=1, 3$, $m=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Сгруппируем слагаемые с одним r и заметим, что $\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[2]}=\varepsilon_{1}\varepsilon_{9}=\varepsilon_{10}=\varepsilon_{[3]}$, $\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[6]}=$ $=\varepsilon_{1}\varepsilon_{15}=\varepsilon_{16}=\varepsilon_{[8]}$. При $r=1$ получаем сумму

$$T_{[0]}\varepsilon_{[3]}+T_{[2]}\varepsilon_{[3]}+\ldots+T_{[14]}\varepsilon_{[3]}=\sigma_{2,1};$$

при $r=3$ — сумму $\sum_k T_{[2k]}\varepsilon_{[8]}=\sigma_{2,0}$, т. е. $\sigma_{4,0}\cdot\sigma_{4,2}=\sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}=-1$. Решая квадратные уравнения, мы нашли $\sigma_{4,0}$, $\sigma_{4,2}$.

На последнем шаге мы рассмотрим группы корней, инвариантные относительно $T_{[8]}$; их восемь. В частности, $\sigma_{8,0}+\sigma_{8,4}=\sigma_{4,0}$. Вычислим $\sigma_{8,0}\cdot\sigma_{8,4}$. Учитывая, что $\varepsilon_{[0]}\cdot\varepsilon_{[4]}=\varepsilon_1\varepsilon_{13}=\varepsilon_{14}=\varepsilon_{[9]}$, получаем $\sigma_{8,0}\cdot\sigma_{8,4}=T_{[0]}\varepsilon_{[9]}+T_{[4]}\varepsilon_{[9]}+T_{[8]}\varepsilon_{[9]}+T_{[12]}\varepsilon_{[9]}=\sigma_{4,1}$. Это позволило найти $\sigma_{8,0}=2\cos(2\pi/17)$ и тем самым закончить решение.

Мы видели, что рассуждение Гаусса целиком построено на использовании преобразований, переставляющих корни. Первым, кто обратил внимание на роль таких преобразований в вопросах разрешимости уравнений, был Лагранж (1736—1813). Вероятно, Гаусс в этот период еще не был знаком с работами Лагранжа. Позднее Галуа (1811—1832) положил изучение этих преобразований в основу замечательной теории, ныне носящей его имя. По существу для уравнения деления круга Гаусс построил теорию Галуа в полном объеме.

ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ФЕРМА. Если не стремиться получить явное выражение для корней, а доказывать лишь их квадратичную иррациональность, то выкладки можно почти полностью опустить, обыгрывая лишь соображения инвариантности. Именно, $\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1}$ — сумма каких-то корней $\varepsilon_{[l]}$, а поскольку эта сумма переходит в себя под действием всех преобразований $T_{[k]}$, все корни входят в нее одинаковое число раз, а значит $\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1}$ — целое число. Аналогично, $\sigma_{4,0}\cdot\sigma_{4,2}$ не меняется при всех преобразованиях вида $T_{[2k]}$, а потому является комбинацией $\sigma_{2,j}$; $\sigma_{8,0}\cdot\sigma_{8,4}$ сохраняется всеми $T_{[4k]}$, а значит, является комбинацией $\sigma_{4,j}$.

Это сокращенное рассуждение позволяет выявить, на какие простые p обобщается доказательство Гаусса квадратичной иррациональности корней p-й степени из 1. Анализ показывает, что мы пользовались лишь тем, что $p-1=2^k$ (на каждом шаге группы делились пополам), и нумерацией корней, опирающейся на первообразность 3 для простого числа 17. Для нумерации можно было пользоваться любым первообразным корнем. Как мы уже отмечали, для любого простого p хотя бы один первообразный корень существует (кстати, можно показать (докажите!), что 3 является первообразным корнем для всех p вида 2^k+1). Заметим также, что если $p=2^k+1$ — простое число, то $k=2^r$. Итак, *доказана возможность по-*

строения циркулем и линейкой правильного p-угольника для всех простых p вида $2^{(2^r)}+1$.

Простые числа вида $2^{(2^r)}+1$ имеют свою историю. Эти простые числа принято называть числами Ферма. Ферма предполагал, что все числа такого рода являются простыми. Действительно, при $r=0$ получаем 3, при $r=1$ — 5, при $r=2$ — 17. Далее при $r=3$ получается 257, при $r=4$ — 65 537. Оба эти числа простые. При $r=5$ получается число 4 294 967 297. Ферма и у него не обнаружил простых делителей, но Эйлер выяснил, что Ферма «просмотрел» делитель 641. Сейчас известно, что числа Ферма являются составными при $r=6$, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 18, 23, 36, 38, 73 (например, при $r=73$ имеется простой делитель $5\cdot 2^{75}+1$). Имеется гипотеза, что существует лишь конечное число простых чисел Ферма.

Что касается правильных n-угольников для составного n, то в силу обстоятельств, отмеченных выше (с. 146), мы сразу получаем возможность искомого построения для всех $n>2$ вида $2^k p_1 p_2 ... p_l$, где p_1, p_2, ..., p_l — различные простые числа Ферма. Замечательно, что *других n, для которых возможно построение,* вообще *не существует*. Доказательство этого утверждения Гаусс не опубликовал: «Хотя границы нашего сочинения не позволяют провести этого доказательства, мы думаем, что надо все же на это указать для того, чтобы кто-либо не пытался искать еще других случаев, кроме тех, которые указаны нашей теорией, например, не надеялся бы свести на геометрические построения (т. е. на построения циркулем и линейкой — *С. Г.*) деление окружности на 7, 11, 13, 19, ... частей и не тратил бы зря своего времени». Из результата Гаусса следует принципиальная возможность построения правильного p-угольника при $p=257$ и 65537, однако вычисление корней, не говоря уже о явном описании построения, требует колоссальной, но совершенно автоматической работы. Замечательно, что нашлись желающие ее провести не только при $p=257$ (Ришело это сделал в сочинении из 80 страниц; есть сведения, что это построение проделал и сам Гаусс), но и при $p=65537$ (решение, полученное Гермесом, содержится в чемодане солидных размеров в Геттингене). Вот какую шутку придумал по этому поводу английский математик Дж. Литлвуд: «Один навязчивый аспирант довел своего руководителя до того, что тот сказал ему: «Идите и разработайте построение правильного многоугольника с 65537 сторонами». Аспирант

удалился, чтобы вернуться через 20 лет с соответствующим построением».

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ. Мы уже отмечали, что день 30 марта 1796 г., когда было найдено построение правильного 17-угольника, решил судьбу Гаусса. Ф. Клейн пишет:

«С этой даты начинается дневник... Перед нашими глазами проходит гордый ряд великих открытий в арифметике, алгебре и анализе... И среди всех этих проявлений, мощных порывов гениального духа, можно сказать, трогательно находить до мелочей добросовестно выполненные ученические работы, от которых не освобождены и такие люди как Гаусс. Мы находим здесь записи добросовестных упражнений в дифференцировании, и непосредственно перед делением лемнискаты здесь встречаются совершенно банальные подстановки в интегралах, в которых должен упражняться любой студент».

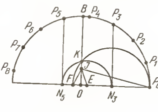
Работа Гаусса надолго становится недосягаемым образцом математического открытия. Один из создателей неевклидовой геометрии Янош Бойяи (1802—1860) называл его «самым блестящим открытием нашего времени или даже всех времен». Только трудно было это открытие постигнуть! Благодаря письмам на родину великого норвежского математика Абеля (1802—1829), доказавшего неразрешимость в радикалах уравнения 5-й степени, мы знаем о трудном пути, который он прошел, изучая теорию Гаусса. В 1825 г. Абель пишет из Германии: «Если даже Гаусс — величайший гений, он, очевидно, не стремился, чтобы все это сразу поняли...» Он решает не встречаться с Гауссом, но позднее пишет из Франции: «Мне в конце концов удалось приподнять завесу таинственности, окружавшую до сих пор теорию деления круга, созданную Гауссом. Теперь ход его рассуждений ясен мне, как божий день». Работа Гаусса вдохновляет Абеля на построение теории, в которой «столько замечательных теорем, что просто не верится». Он собирается в Германию, чтобы «взять Гаусса штурмом». Несомненно влияние Гаусса и на Галуа.

Сам Гаусс сохранил трогательную любовь к своему первому открытию на всю жизнь:

«Рассказывают, что Архимед завещал построить над своей могилой памятник в виде шара и цилиндра в память о том, что он нашел отношение объемов цилиндра и вписанного в него шара — 3:2. Подобно Архимеду Гаусс

выразил желание, чтобы в памятнике на его могиле был увековечен семнадцатиугольник. Это показывает, какое значение сам Гаусс придавал своему открытию. На могильном камне Гаусса этого рисунка нет, но памятник, воздвигнутый Гауссу в Брауншвейге, стоит на семнадцатиугольном постаменте, правда, едва заметном зрителю» (Г. Вебер).

ПРИЛОЖЕНИЕ. Приведем выдержку из книги Х. Кокстера «Введение в геометрию» (М.: Наука, 1966, с. 49), содержащую рецепт Ричмонда для построения правильного 17-угольника:



Соединим точку P_0 с точкой J, лежащей на радиусе OB на расстоянии $^1/_4$ OB от центра. На диаметре, проходящем через точку P_0, выберем точки E и F так, чтобы $\sphericalangle OJE$ был равен четверти угла OJP_0, а $\sphericalangle FJE$ был равен 45°. Пусть окружность, построенная на FP_0 как на диаметре, пересекает OB в точке K, и пусть окружность с центром E и радиусом EK пересекает OP_0 в точках N_3 (между O и P_0) и N_5. Восставим перпендикуляры к OP_0 в этих двух точках до пересечения с первоначальной окружностью в точках P_3 и P_5. Тогда дуга P_3P_5 (и равная ей дуга P_1P_3) равна $^2/_{17}$ окружности. В доказательстве несколько раз используется тот факт, что корни уравнения $x^2 + 2x \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha - 1 = 0$ равны $\operatorname{tg} \alpha$ и $-\operatorname{ctg} \alpha$.

II. ЗОЛОТАЯ ТЕОРЕМА

Я случайно натолкнулся на одну нзумительную арнфметическую истину, н, так как она не только показалась мне прекрасиой сама по себе, ио н навела на мысль, что оиа связана и с другнми выдающимнся фактамн, я со всей эиергией взялся за то, чтобы выяснить принципы, иа которых оиа основывается, и получнть строгое ее доказательство. После того как это желанне, наконец, осуществнлось, прелесть этих нсследованнй настолько увлекла меня, что я уже не мог их оставить.

Гаусс

30 марта 1796 г., в день когда был построен правильный 17-угольник, начинается дневник Гаусса — летопись его замечательных открытий. Следующая запись в дневнике появилась уже 8 апреля. В ней сооб-

щалось о доказательстве теоремы, которую он назвал «золотой». Частные случаи этого утверждения доказали Ферма, Эйлер, Лагранж. Эйлер сформулировал общую гипотезу, неполное доказательство которой дал Лежандр. 8 апреля Гаусс нашел полное доказательство гипотезы Эйлера. Впрочем, Гаусс еще не знал о работах своих великих предшественников. Весь нелегкий путь к «золотой теореме» он прошел самостоятельно!

Все началось с детских наблюдений. Иногда, глядя на очень большое число, можно сразу сказать, что из него нельзя точно извлечь квадратный корень. Например, можно воспользоваться тем, что квадраты целых чисел не могут оканчиваться ни на 2, ни на 3, ни на 7, ни на 8. А иногда можно воспользоваться тем, что квадрат целого числа может либо делиться на 3, либо давать остаток 1 (но никогда 2). Оба эти свойства имеют одну природу, поскольку последняя цифра — это остаток от деления на 10. Гаусса интересует общая проблема: *какими могут вообще быть остатки от деления квадратов на различные простые числа.* Исследуем и мы этот вопрос.

КВАДРАТИЧНЫЕ ВЫЧЕТЫ. Всюду ниже мы будем предполагать, что p — простое число, причем $p \neq 2$. Делить целые числа можно «с недостатком» или «с избытком». Иными словами, остатки можно считать положительными или отрицательными. *Условимся выбирать остаток наименьшим по абсолютной величине.*

Нетрудно доказать, что если p нечетно, то всякое целое число n единственным образом представляется в виде

$$n = pq + r, \quad |r| \leqslant \frac{p-1}{2}, \qquad (1)$$

где q и r — целые.

Будем называть r остатком от деления n на p или **вычетом** числа n **по модулю** p. Это обозначается так:

$$n \equiv r (\mathrm{mod}\ p)\ ^{*)}.$$

Выпишем в табл. 1 вычеты для нескольких первых простых чисел $p > 2$. Нас интересует, какие вычеты (ос-

*) То, что мы называем вычетом (остатком), обычно называют абсолютно наименьшим вычетом (остатком). Мы сократили название, так как других вычетов нам не встретится. Обозначение $n \equiv r$ (mod p) также используется обычно в более общей ситуации: оно означает, что $n - r$ делится на p.

Таблица 1

p	$k=\frac{p-1}{2}$	Вычеты (остатки) по модулю
3	1	−1 0 1
5	2	−2 −1 0 1 2
7	3	−3 −2 −1 0 1 2 3
11	5	−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
13	6	−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6
17	8	−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

татки) могут иметь квадраты целых чисел. Эти остатки мы будем называть квадратичными вычетами, а остальные — квадратичными невычетами.

Числа n^2 и r^2, где r — остаток числа n по модулю p, имеют один и тот же остаток при делении на p. Поэтому, если мы хотим найти квадратичные вычеты, то достаточно возводить в квадрат лишь вычеты, т. е. целые числа r, $|r| \leqslant k=(p-1)/2$. При этом, разумеется, достаточно рассматривать $r \geqslant 0$.

Проведем вычисления для простых чисел из предыдущей таблицы. Составим новую таблицу, в которой «жирные» числа отвечают квадратичным вычетам (табл. 2).

Таблица 2

p	k	Квадратичные вычеты и невычеты по модулю
3	1	−1 **0** **1**
5	2	−2 **−1** **0** **1** 2
7	3	**−3** −2 −1 **0** **1** **2** 3
11	5	−5 −4 −3 **−2** −1 **0** **1** 2 **3** **4** **5**
13	6	−6 −5 **−4** **−3** −2 **−1** **0** **1** 2 **3** **4** 5 6
17	8	**−8** −7 −6 −5 **−4** −3 **−2** **−1** **0** **1** **2** 3 **4** 5 6 7 **8**

Попытаемся подметить некоторые закономерности и оценить степень их общности. Во-первых, *в каждой строке есть в точности $k+1$ жирное число*. Покажем, что так обстоит дело для всех простых $p>2$. Из сказанного выше следует, что для каждого нечетного p (даже не простого) квадратичных вычетов не больше $k+1$. Мы покажем, что их точно $k+1$, если убедимся, что все числа $r^2 (0 \leqslant r \leqslant k)$ дают при делении на p различные остатки. Если $r_1 > r_2$ и $r_1^2 - r_2^2$ дают одинаковые остатки, то $r_1^2 - r_2^2$ делится

на p. Поскольку p — простое число, то r_1+r_2 или r_1-r_2 должно делиться на p, чего не может быть, так как $0<r_1\pm r_2<2k<p$. Здесь мы впервые воспользовались простотой p (покажите, что для составных чисел наше утверждение не верно).

ТЕОРЕМА ФЕРМА И КРИТЕРИЙ ЭЙЛЕРА. Далее, очевидно, что 0 *и* 1 *являются жирными во всех строчках.* Что касается остальных столбцов, то сразу не видна закономерность, согласно которой в них появляются жирные числа. Начнем с $a=-1$. Оно является жирным при $p=5$, 13, 17, ... и не является при $p=3$, 7, 11 ... Вы, может быть, заметили, что простые числа первой группы при делении на 4 дают остаток 1, а второй — остаток -1 (заметьте, что простые числа $p\neq 2$ других остатков вообще давать не могут). Итак, можно предположить, что -1 *является квадратичным вычетом для простых чисел вида* $p=4l+1$ *и квадратичным невычетом для* $p=4l-1$. Эту закономерность первым заметил Ферма, однако оставил ее без доказательства. Попытайтесь найти доказательство самостоятельно! Вы убедитесь, что главная трудность в том, что не видно, как воспользоваться простотой p, а без этого предположения утверждение становится неверным.

Первое доказательство после нескольких неудачных попыток нашел в 1747 г. Эйлер. В 1755 г. Эйлер нашел другое, очень изящное доказательство, использующее м а л у ю т е о р е м у Ф е р м а: *Если p — простое число, то для всякого целого a,* $0<|a|<p$,

$$a^{p-1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $p=2$ утверждение очевидно, и можно считать p нечетным. Рассмотрим p чисел 0, $\pm a$, $\pm 2a$, $\pm 3a$, ..., $\pm ka$; $k=(p-1)/2$. Все эти числа при делении на p дают разные остатки, так как в противном случае r_1a-r_2a, $r_1>r_2$, $|r_1|\leqslant k$, $|r_2|\leqslant k$, делится на p, но a не делится на p и r_1-r_2 не делится на p, так как $0<r_1-$ $-r_2<p$. Перемножим те из рассматриваемых чисел, которые отличны от нуля; получим $(-1)^k(k!)^2a^{p-1}$. Поскольку среди остатков сомножителей содержатся все ненулевые вычеты и учитывая правило вычисления остатка произведения, получаем, что произведение имеет тот же вычет, что и $(-1)^k\cdot(k!)^2$, т. е. $(k!)^2(a^{p-1}-1)$ делится на p. Так как $k!$ не делится на $p\,(0<k<p)$, то на p делится $a^{p-1}-1$, и доказательство окончено.

Следствие (критерий Эйлера квадратичности вычета). *Вычет $b \neq 0$ является квадратичным тогда и только тогда, когда*

$$b^k \equiv 1 \pmod p, \ k = \frac{p-1}{2}. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость условия (3) устанавливается легко. Если $a^2 \equiv b \pmod p$, $0 < a < p$, то $a^{2k} = a^{p-1}$ и b^k должны иметь одинаковые вычеты, равные, в силу (2), единице. Достаточность показывается сложнее. Мы выведем ее из следующей леммы.

Лемма 1. *Если $P(x)$ — многочлен степени l, p — простое число и имеется более l различных вычетов r по модулю p, для которых*

$$P(r) \equiv 0 \pmod p, \tag{4}$$

то (4) имеет место для всех вычетов.

Доказательство будем вести индукцией по l. При $l = 0$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для многочленов степени не выше $l - 1$. Пусть далее r_0, $r_1, \ldots, r_l$, $0 \leqslant r_i < p$, удовлетворяют сравнению $P(r) \equiv 0 \pmod p$. Представим $P(x)$ в виде $P(x) = (x - r_0)\, Q(x) + P(r_0)$, где $Q(x)$ — многочлен степени $l - 1$, а $P(r_0)$ делится на p. Тогда, поскольку $P(r_0)$ делится на p, $(r_j - r_0) Q(r_j)$ делится на p при $1 \leqslant j \leqslant l$. Так как $r_j - r_0$ не может делиться на p, то $Q(r_j)$ делится на p, а тогда по предположению индукции $Q(r)$ будет делиться на p при всех r. Следовательно, $P(r)$ делится на p при всех r.

Применим лемму к многочлену $P(x) = x^k - 1$. Тогда соотношению (4) удовлетворяет k ненулевых квадратичных вычетов. Однако имеется вычет $(r = 0)$, не удовлетворяющий (4); значит, по лемме, все квадратичные невычеты должны не удовлетворять (4) и, следовательно, условие (3) достаточно.

Замечание. Для квадратичного невычета b имеем: $b^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p$. Действительно, если $b^{(p-1)/2} \equiv r \pmod p$, то $r^2 \equiv 1 \pmod p$, откуда $r = -1$. (Сравнению $r^2 \equiv 1 \pmod p$ удовлетворяют только два вычета: $r \equiv 1 \pmod p$, $r \equiv -1 \pmod p$.)

Критерий Эйлера позволяет мгновенно решить вопрос о том, для каких p вычет -1 является квадратичным. Подставляя в (3) $b = -1$, получаем, что при $p = 4l + 1$ (3) выполняется (k — четно), а при $p = 4l - 1$ (3) не выполняется

6*

(k — нечетно). Сформулированная выше гипотеза стала теоремой.

З а д а ч а 1. Доказать, что если $p \neq 2$ есть простой делитель числа n^2+1, то $p=4l+1$.

Итак, мы доказали, что -1 — *квадратичный вычет для* $p=4l+1$ *и квадратичный невычет для* $p=4l-1$.

Обсудим некоторые особенности приведенного доказательства. Это утверждение состоит из двух частей: отрицательное утверждение для $p=4l-1$ и положительное для $p=4l+1$. В первом случае естественно пытаться найти некоторое свойство, которому квадратичные вычеты удовлетворяют, а -1 не удовлетворяет, что и сделал Эйлер. Найденное свойство оказалось характеристическим, т. е. одновременно удалось доказать и вторую часть гипотезы. Если вы пробовали доказать эту часть утверждения самостоятельно, то вы, вероятно, пытались явно построить по $p=4l+1$ число n^2, дающее при делении на p остаток -1. Доказательство Эйлера не эффективно в том смысле, что оно не дает явной конструкции для числа n по p, а лишь утверждает его существование. Иными словами, гарантируется, что если мы будем перебирать числа $1, 2, \ldots, 2l$, возводить их в квадраты, брать остатки от деления квадратов на p, то рано или поздно мы получим -1. Остается открытым вопрос, нельзя ли указать более явную конструкцию n и p, не использующую процедуры перебора. Положительный ответ дал Лагранж (1736—1813) в 1773 г., используя следующую теорему.

Т е о р е м а В и л ь с о н а *). *Если* $p=2k+1$ *есть простое число, то*

$$(-1)^k (k!)^2 \equiv -1 \pmod{p}. \qquad (5)$$

Для доказательства этой теоремы воспользуемся леммой 1. Положим $P(x)=(x^2-1)(x^2-4)\ldots(x^2-k^2)$, $Q(x)=x^{2k-1}-1$. Тогда $R(x)=P(x)-Q(x)$ — многочлен степени не выше $2k-1$, который при $x=\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k$ делится на p (этим свойством обладают P и Q). По лемме $R(x) \equiv 0 \pmod{p}$ для всех x. Собственно, новым фактом является лишь то, что $R(0) \equiv 0 \pmod{p}$. Поскольку $R(0)=(-1)^k(k!)^2+1$, получаем (5).

С л е д с т в и е Л а г р а н ж а. *При* $p=4l+1$ *имеем*: $[(2l)!]^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

---

*) Вильсон (1741—1793) — юрист, изучавший математику в Кембридже.

З а д а ч а 2. Доказать, что если (5) верно, то p — простое число.

Эта задача дает повод отметить, что в конструкции Лагранжа простота p существенна.

Выяснив, когда $a=-1$ является квадратичным вычетом, Эйлер, используя огромный числовой материал, пытается найти аналогичные условия для других a. Он подмечает, что при $a=2$ все зависит от остатка при делении p на 8; 2 оказывается квадратичным вычетом для простых $p=8l\pm1$ и невычетом при $p=8l\pm3$ (простое число при делении на 8 может давать остатки ±1, ±3). Далее, 3 является квадратичным вычетом при $p=12l\pm1$ и квадратичным невычетом при $p=12l\pm5$. Эйлер высказывает гипотезу, что и в общем случае все определяется остатком от деления p на $4a$.

Г и п о т е з а Э й л е р а *). *Число a одновременно является или квадратичным вычетом или квадратичным невычетом для всех простых чисел, входящих в арифметическую прогрессию $4aq+r$, $q=0, 1, 2, \ldots$; $0<r<4a$.*

Ясно, что если $4a$ и r имеют общий делитель $s>1$, то в арифметической прогресии не будет ни одного простого числа. Если же первый член и разность прогрессии взаимно просты, то, как утверждает теорема Дирихле (1805—1859), в этой прогрессии имеется бесконечное число простых чисел (обобщение теоремы о бесконечности числа простых чисел в натуральном ряду).

Возвратимся к гипотезе Эйлера. Оказалось, что критерий Эйлера, который сослужил нам добрую службу при $a=-1$, отказывает уже при $a=2$. Эйлеру не удалось разобраться в этом случае. Ему удалось доказать свою гипотезу, не считая $a=-1$, лишь при $a=3$. Затем Лагранж, которого мы уже упоминали, доказал гипотезу при $a=2$, 5, 7; Лежандр в 1785 г. предложил доказательство гипотезы для общего случая, которое, однако, содержало существенные пробелы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГАУССА. Вначале Гаусс, как и его предшественники, замечает утверждение для $a=-1$, затем, уже угадав результат для общего случая, последовательно разбирает случай за случаем, продвинувшись дальше других: им рассмотрены $a=\pm2$, ±3, ±5, ±7. Общий случай (гипотеза Эйлера) не поддался первой атаке: «Эта теорема мучила меня целый год и не поддавалась

*) Гаусс назвал ее «золотой теоремой».

напряженнейшим усилиям». Заметим, что это было то место, где Гаусс «догнал» современную математику: усилия крупнейших математиков, пытавшихся доказать гипотезу Эйлера, были безрезультатными.

Наконец, 8 апреля 1796 г. он находит общее доказательство, которое Кронекер (1823—1891) очень метко назвал «пробой сил гауссова гения». Доказательство проводится двойной индукцией по a и p; Гауссу приходится придумывать существенно различные соображения для рассмотрения восьми (!) различных случаев. Нужно было иметь не только поразительную изобретательность, но и удивительное мужество, чтобы не остановиться на этом пути. Позднее Гаусс нашел еще шесть доказательств «золотой» теоремы (ныне их известно около пятидесяти). Как это часто бывает, после того как теорема доказана, удается найти доказательства много более простые, чем первоначальное. Мы приведем здесь доказательство, мало отличающееся от третьего доказательства Гаусса. В его основе лежит ключевая лемма, доказанная Гауссом не ранее 1808 г.

Лемма 2. *Пусть* $p=2k+1$ *— простое число,* a *— целое число,* $0<|a|\leqslant 2k$; $r_1, r_2, \ldots, r_k$ *— вычеты чисел* a, $2a, \ldots, ka$; ν *— число отрицательных среди них. Тогда*

$$a^k \equiv (-1)^\nu \pmod p). \qquad (6)$$

Применяя критерий Эйлера, получаем такое следствие:

Критерий Гаусса квадратичности вычета. *Вычет является квадратичным тогда и только тогда, когда фигурирующее в лемме 2 число* ν *четно.*

Доказательство леммы 2. Заметим, что все вычеты $r_1, \ldots, r_k$ различны по абсолютной величине. Это следует из того, что сумма и разность любых двух из них не делится на $p: r_i \pm r_j = (i \pm j)a$, $i \neq j$; $|i \pm j| < p$, $|a| < p$. Таким образом, набор модулей $|r_1|, \ldots, |r_k|$ — это числа $1, 2, \ldots, k$ в некотором порядке. В результате $a \cdot 2a \ldots$ $\ldots ka = a^k k!$ при делении на p дает тот же остаток, что и $r_1 \ldots r_k = (-1)^\nu k!$. Учитывая, что $k!$ не делится на простое число p, получаем (6).

Доказательство гипотезы Эйлера. Заметим, что в приводимом рассуждении уже не используется простота p — она в полной мере использована в лемме Гаусса. Отметим на числовой оси точки (рис. 1, *а, б*) $mp/2$, если $a>0$, и $-mp/2$, если $a<0$; $m=0, 1, 2, \ldots, |a|$. Занумеруем интервалы с концами в этих точках по номерам

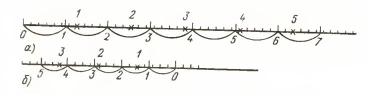


Рис. 1. *а*) $p=11$ $(k=5)$, $a=7$, $\nu=3$; *b*) $p=7$ $(k=3)$, $a=-5$, $\nu=2$.

левых концов. Отметим теперь крестиками точки a, $2a$, ..., ka; так как a — целое, не делящееся на p, то крестики не могут совпасть с ранее отмеченными точками, причем все крестики попадут в какие-то из построенных интервалов $(|a|p/2>|a|k)$. Легко заметить, что фигурирующее в лемме *число* ν — *это число крестиков, попавших в интервалы с нечетными номерами* (докажите!).

Подвергнем теперь нашу картинку преобразованию подобия с коэффициентом $1/a$ (рис. 1 перейдет в рис. 2). При

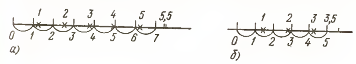


Рис. 2.

этом точки $mp/2$ перейдут в точки, делящие отрезок $[0, p/2]$ на $|a|$ равных частей, а крестики — в целочисленные точки $1, 2, \ldots, k$.

Нумерация интервалов теперь будет зависеть от знака a: при $a>0$ они нумеруются номерами левых концов, при $a<0$ — номерами правых концов; ν — число целочисленных точек в интервалах с нечетными номерами. Если мы увеличим p на $4al$, то в каждый интервал добавится точно $2l$ целых точек. Это следует из того, что при сдвиге интервала на целое число количество целых точек в нем не меняется, а на любом отрезке целочисленной длины n или интервале длины n с нецелочисленными концами имеется ровно n целых точек (докажите!). Итак, при изменении p на $p+4al$ величина ν изменится на четное число, а $(-1)^\nu$ не изменится. Значит, для всех p в арифметической прогрессии $p=4aq+r$ значение $(-1)^\nu$ — одно и то же, и гипотеза Эйлера доказана.

Одновременно указан некоторый способ выяснить, является ли a квадратичным вычетом для p. Нужно взять остаток r от деления p на $4a$ (для удобства положитель-

ный); разделить $(0, r/2)$ на $|a|$ частей, занумеровав их номерами левых (правых) концов, если a — положительное (отрицательное); сосчитать число ν целых точек, попавших в интервалы с нечетными номерами; a — квадратичный вычет в том и только в том случае, когда ν четно.

Рис. 3. $r=1$, $a=2$, $\nu=0$; $r=3$, $a=3$, $\nu=1$; $r=5$, $a=2$, $\nu=1$; $r=7$, $a=2$, $\nu=2$.

Проделаем эти вычисления для $a=2$, чтобы подтвердить наблюдения Эйлера, о которых говорилось на с. 165. Пусть $a=2$; тогда достаточно рассмотреть $r=1$, 3, 5, 7, поскольку в остальных случаях арифметическая прогрессия не будет содержать простых чисел. Как видно из рис. 3, число 2 является квадратичным вычетом для

$$p=8q+1,\ p=8q+7,$$

т. е. $p=8q\pm1$.

Упражнение. Покажите, что -2 есть квадратичный вычет для $p=8q+1$, $p=8q+3$.

Аналогично рассматривается случай $a=\pm3$. Приведем итоги вычислений (таблица для ν):

a \ r	1	5	7	11
3	0	1	1	2
−3	0	1	2	3

Таким образом, 3 — квадратичный вычет при $p=12l\pm1$ (невычет при $p=12l\pm5$), а (-3) — квадратичный вычет для $p=12l+1$, $p=12l-5$.

Для случая $a=2$, 3 вы, конечно, заметили еще одну закономерность: простые числа, имеющие при делении на $4a$ остатки, равные по абсолютной величине, одновременно являются либо квадратичными вычетами, либо квадратичными невычетами. Это обстоятельство, разумеется, не осталось незамеченным для Эйлера, и он сформулировал гипотезу в более сильной форме, чем мы ее привели.

Сформулируем теперь

Дополнение к гипотезе Эйлера. *Пусть p и q — простые числа и $p+q=4a$. Тогда a одновременно является или квадратичным вычетом по модулю p и q, или квадратичным невычетом.*

Доказательство. Выполним построения, указанные при доказательстве гипотезы Эйлера для интервалов

Рис. 4. $p=11$, $q=5$, $a=(p+q)/4=4$, $\nu(p)=2$, $\nu(q)=2$.

$(0, p/2)$, $(0, q/2)$, $a=(p+q)/4$. Для удобства расположим интервалы так, чтобы они имели точку 0 общей, находясь по разные стороны от нее; при этом интервал $(0, q/2)$ мы перевернем (рис. 4). Пусть $\nu(p)$, $\nu(q)$ — число целых точек в интервалах с нечетными номерами для p и q соответственно. Нам достаточно доказать, что $\nu(p)+\nu(q)$ — четно. Пусть $\nu_j(p)$, $\nu_j(q)$ — число целых точек в соответствующих интервалах с номерами j. Легко видеть, что $\nu_j(p)+\nu_j(q)=$ $=2$ при $j>0$, откуда и будет следовать нужный результат.

Действительно, на интервале между j-ми левой и правой точками ($j>0$) лежит $2j$ целых точек, поскольку, как мы уже отмечали, на интервале длины $2j$ с нецелочисленными концами лежит $2j$ целых точек.

КВАДРАТИЧНЫЙ ЗАКОН ВЗАИМНОСТИ. В 1798 г. Лежандр указал очень удобное утверждение, эквивалентное гипотезе,— квадратичный закон взаимности. Введем обозначение — так называемый символ Лежандра:

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}+1, & \text{если } a\neq 0 \text{ квадратичный вычет по модулю } p,\\ -1, & \text{если } a \text{ — квадратичный невычет.}\end{cases}$$

В силу критерия Эйлера (и замечания к нему, с. 163)

$$\left(\frac{a}{p}\right)-a^{(p-1)/2}\equiv 0 \pmod p. \qquad (7)$$

Отсюда сразу следует мультипликативное свойство символа Лежандра:

$$\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right). \qquad (8)$$

Отметим также, что символ Лежандра можно доопределить для всех a, не делящихся на p, с сохранением (7), (8), полагая

$$\left(\frac{a+p}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right). \qquad (9)$$

Квадратичный закон взаимности. *Если p, q — нечетные простые числа, то*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Другими словами, (p/q) и (q/p) имеют противоположные знаки, если $p=4l+3$, $q=4m+3$, и совпадают в остальных случаях.

Название закона связано с тем, что в нем устанавливается «взаимность» между вопросами о том, когда p — квадратичный вычет по модулю q и когда q — квадратичный вычет по модулю p.

Доказательство. Всегда или $p-q=4a$, или $p+q=4a$.

I случай. Пусть $p-q=4a$, т. е. p и q имеют одинаковые остатки при делении на 4. Тогда $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q+4a}{q}\right)=\left(\frac{4a}{q}\right)=\left(\frac{a}{q}\right)$ (мы воспользовались (9), (8) и тем, что $\left(\frac{4}{q}\right)=1$ при всех q). Далее, $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p-4a}{p}\right)=\left(\frac{-4a}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right)$. В силу уже доказанной гипотезы Эйлера $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a}{q}\right)$, т. е. $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$ при $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$ и $\left(\frac{p}{q}\right)=-\left(\frac{q}{p}\right)$ при $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$. Остается вспомнить, что $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$ при $p=4l+1$, $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$ при $p=4l+3$.

II случай. Пусть $p+q=4a$, т. е. p и q имеют разные остатки при делении на 4. Имеем $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{4a-q}{q}\right)=\left(\frac{a}{q}\right)$. Аналогично, $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)$. В силу дополнения к гипотезе Эйлера $\left(\frac{a}{q}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)$, т. е. $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$. Доказательство окончено.

Нетрудно заметить, что проведенные рассуждения можно обратить и вывести из квадратичного закона взаим-

ности гипотезу Эйлера и дополнение к ней (проделайте это!). Отметим еще, что формулы (8) — (10) дают способ вычисления $\left(\frac{p}{q}\right)$ существенно более простой, чем описанный выше комбинаторный способ. Проиллюстрируем это на примере: $\left(\frac{59}{269}\right)=\left(\frac{269}{59}\right)=\left(\frac{59\cdot 4+33}{59}\right)=\left(\frac{3}{59}\right)\cdot\left(\frac{11}{59}\right)=$ $=-1$, так как $\left(\frac{3}{59}\right)=-\left(\frac{59}{3}\right)=-\left(\frac{2}{3}\right)=1$; $\left(\frac{11}{59}\right)=$ $=-\left(\frac{59}{11}\right)=-\left(\frac{4}{11}\right)=-1$. Легко показать, что вычисление символа Лежандра всегда можно свести к случаю, когда p или q равно 2.

Упражнение. Сосчитайте $\left(\frac{37}{557}\right)$, $\left(\frac{43}{991}\right)$.

В заключение отметим, что задача о квадратичных вычетах послужила отправной точкой большой и плодотворной математической деятельности. Многочисленные попытки Гаусса получить новые доказательства квадратичного закона взаимности далеко не в первую очередь диктовались желанием упростить доказательства. Гаусса не оставляла мысль, что им по-настоящему не вскрыты глубокие закономерности, следствием которых является закон взаимности. В полной мере это удалось сделать лишь позднее, в рамках теории алгебраических чисел. Гаусс потратил много сил на обобщение квадратичного закона на кубический и биквадратный случаи, получив замечательные результаты. Эти исследования были продолжены, и изучение различных законов взаимности остается одним из центральных вопросов теории чисел по сей день.

III. КОРОЛЕВСКИЕ БУДНИ

Мы подробно рассказали о двух первых великих открытиях Гаусса, сделанных им в Геттингене, на протяжении 10 дней, за месяц до того, как ему исполнилось 19 лет. Второе из этих открытий целиком относилось к арифметике (теории чисел), а первое в существенном опиралось на арифметические рассмотрения. Теория чисел — первая любовь Гаусса.

ЛЮБИМЕЙШАЯ НАУКА ВЕЛИЧАЙШИХ МАТЕМАТИКОВ. Это один из многочисленных эпитетов, которыми Гаусс наделял арифметику (теорию чисел). К тому



Молодой Гаусс, 1803 г.

времени арифметика из набора изолированных наблюдений и утверждений уже превратилась в науку.

Позднее Гаусс напишет: «Главным образом, более поздним исследователям, правда немногочисленным, но завоевавшим непреходящую славу,— таким, как Ферма, Эйлер, Лагранж, Лежандр, мы обязаны тем, что они нашли доступ к сокровищнице этой божественной науки и показали, какими богатствами она наполнена».

Одна из самых удивительных сторон «феномена Гаусса» заключается в том, что он в своих первых работах практически не опирался на достижения предшественников, переоткрыв за короткий срок то, что было сделано в теории чисел за полтора века трудами крупнейших математиков.

Гаусс использует пребывание в Геттингене для изучения трудов классиков, он переосмысливает их достижения, сопоставляет с тем, что он открыл сам. По его замыслу результаты этой деятельности должны были быть подытожены во всеобъемлющем труде. К написанию этой книги Гаусс приступает после возвращения в Брауншвейг в 1798 г. после окончания университета. В книгу должны были войти собственные результаты, все еще остававшиеся неопубликованными, если не считать газетной заметки, в которой кстати обещалось: «Это открытие является собственно лишь следствием одной еще не совсем законченной большой теории. Как только она получит эту законченность, она будет предложена публике». На осуществление грандиозного замысла ушло четыре года напряженной работы.

В 1801 г. вышли знаменитые «Арифметические исследования» Гаусса. Эта огромная книга (более 500 страниц крупного формата) содержит основные результаты Гаусса: квадратичный закон взаимности, задачу деления круга, вопрос о представимости целых чисел в виде $am^2 + bmn + cn^2$ (в частности, в виде суммы квадратов). Кни-

га была издана на средства герцога и ему посвящена. В изданном виде книга состояла из семи частей. На восьмую часть денег не хватило. В этой части речь должна была идти об обобщении закона взаимности на степени выше второй, в частности — о биквадратичном законе взаимности. Полное доказательство биквадратичного закона Гаусс нашел лишь 23 октября 1813 г., причем в дневниках он отметил, что это совпало с рождением сына.

Клейн писал: «В своих «Арифметических исследованиях» Гаусс в полном смысле этого слова создал современную теорию чисел и предопределил все ее дальнейшее развитие до нынешнего дня. Восхищение этим трудом возрастает еще больше, когда наблюдаешь, как Гаусс без всякого внешнего побуждения с самого начала черпает этот мир из самого себя».

За пределами «Арифметических исследований» Гаусс, по существу, теорией чисел больше не занимался. Он лишь продумывал и доделывал то, что было задумано в те годы. Например, он придумал еще шесть разных доказательств квадратичного закона взаимности. «Арифметические исследования» сильно опередили свое время. В процессе их создания Гаусс не имел серьезных математических контактов, а вышедшая книга долго не была доступна никому из немецких математиков. Во Франции, где можно было рассчитывать на интерес Лагранжа, Лежандра и др., книге не повезло: обанкротился книготорговец, который должен был распространять книгу, и большая часть тиража пропала. В результате ученикам Гаусса приходилось позднее переписывать отрывки из книги от руки. Положение в Германии стало меняться лишь в 40-х годах, когда Дирихле основательно изучил «Исследования» и читал по ним лекции. А в Казань — к Бартельсу и его ученикам — книга попала в 1807 г.

«Арифметические исследования» оказали огромное влияние на дальнейшее развитие теории чисел и алгебры. Отталкиваясь от работы Гаусса о делении круга, Галуа пришел к решению вопроса о разрешимости уравнений в радикалах. Законы взаимности до сих пор занимают одно из центральных мест в алгебраической теории чисел.

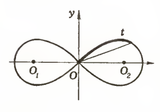
ГЕЛЬМШТАДТСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ. В Брауншвейге Гаусс не имел литературы, необходимой для работы над «Арифметическими исследованиями». Поэтому он часто ездил в соседний Гельмштадт, где была хорошая библиотека. Здесь в 1798 г. Гаусс подготовил диссертацию,

посвященную доказательству Основной теоремы алгебры — утверждения о том, что всякий многочлен с комплексными (в частности — с действительными) коэффициентами имеет комплексный корень (если хотеть оставаться в области действительных чисел, то Основную теорему алгебры можно сформулировать так: *всякий многочлен с действительными коэффициентами раскладывается в произведение многочленов первой и второй степени*). Гаусс критически разбирает все предшествующие попытки доказательства и с большой тщательностью проводит идею Даламбера. Безупречного доказательства все же не получилось, так как не хватало строгой теории непрерывности. В дальнейшем Гаусс придумал еще три доказательства Основной теоремы (последний раз — в 1848 г.).

ЛЕМНИСКАТА И АРИФМЕТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ. Расскажем еще об одной линии в работах Гаусса, начавшейся в детстве.

В 1791 г., когда Гауссу было 14 лет, его занимала следующая игра. Он брал два числа a_0, b_0 и строил для них среднее арифметическое $a_1=(a_0+b_0)/2$ и среднее геометрическое $b_1=\sqrt{a_0b_0}$. Затем он вычислял средние от a_1, b_1: $a_2=(a_1+b_1)/2$, $b_2=\sqrt{a_1b_1}$, и т. д. Гаусс вычислял обе последовательности с большим числом знаков. Очень скоро он уже не мог различить a_n и b_n — все вычисленные знаки совпадали. Другими словами, обе последовательности быстро стремились к общему пределу $M(a_0, b_0)$ (называемому арифметико-геометрическим средним).

В те же годы Гаусс много возился с кривой, называемой лемнискатой (или лемнискатой Бернулли), — множеством точек, произведение расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек O_1, O_2 (фокусов) постоянно и равно $(^1/_2\,|O_1O_2|)^2$. К систематическому изучению лемнискаты Гаусс перешел в 1797 г. Он долго пытается найти длину лемнискаты, пока не догадывается, что она равна $\frac{2\pi}{M(\sqrt{2}, 2)}|O_1O_2|$. Мы не знаем, как Гаусс сообразил это, но знаем, что было это 30 мая 1799 г. и что, не имея вначале доказательства, он сосчитал обе величины с одиннадцатью (!) десятичными знаками. Гаусс придумал для лемнискаты функции, аналогичные тригонометрическим функциям для окруж-



ности. Например, для лемнискаты, расстояние между фокусами которой равно $\sqrt{2}$, лемнискатный синус sl t — это просто длина хорды, соответствующей дуге длины t. Последние годы XVIII столетия у Гаусса уходят на построение теории лемнискатных функций. Для них были получены теоремы сложения и приведения, аналогичные теоремам для тригонометрических функций.

От лемнискатных функций Гаусс переходит к их обобщению — эллиптическим функциям. Он понимает, что речь идет «о совершенно новой области анализа». После 1800 г. Гаусс уже не смог уделять эллиптическим функциям столько времени, сколько было необходимо для доведения теории до состояния, удовлетворяющего его своей полнотой и строгостью. С самого начала он отказался от регулярных публикаций, надеясь опубликовать все разом, как это было с его арифметическими работами. Однако заботы так никогда и не доставили ему необходимого времени.

В 1808 г. он пишет своему другу и ученику Шумахеру: «С круговыми и логарифмическими функциями мы умеем теперь обходиться как единожды один, но великолепный золотой родник, хранящий сокровенное высших функций, остается пока почти terra incognita *). Я очень много работал над этим прежде и со временем дам собственный большой труд об этом, на что я намекал еще в моих «Арифметических исследованиях». Приходишь в изумление от чрезвычайного богатства новых и в высшей степени интересных истин и соотношений, доставляемых этими функциями».

Гаусс считал, что может не торопиться с публикацией своих результатов. Тридцать лет так и было. Но в 1827 г. сразу два молодых математика — Абель и Якоби — опубликовали многое из того, что было им получено.

«Результаты Якоби представляют часть моей собственной большой работы, которую я собираюсь когда-нибудь издать. Она будет представлять исчерпывающий труд на эту тему, если только небесам будет угодно продлить мою жизнь и даровать мне силы и душевный покой» (письмо Шумахеру).

«Господин Абель предвосхитил многие мои мысли и примерно на треть облегчил мою задачу, изложив результаты с большой строгостью и изяществом. Абель шел тем

*) Неизведанная область (лат.).

же путем, что и я в 1798 г., поэтому иет ничего иевероятиого в том, что мы получили столь похожне рсзультаты. К моему удивлению, это сходство распространяется даже на форму, а местами н на обозначеиия, поэтому миогне его формулы кажутся списанными с монх. Но чтобы ннкто ие понял меня иеправильио, я должеи добавить, что ие помню ин одиого случая, когда я говорил об этнх исследованнях с кем-иибудь нз посторонних» (пнсьмо Бесселю).

Наконец, в письме Креллю: «Поскольку Абель продемоистрировал такую проницательность н такое нзящество в вопросах нзложения, я чувствую, что могу совершенно отказаться от опублнкования полученных миой результатов» (май 1828 г.).

Следует отметнть, что замечанне Гаусса в «Арнфметических нсследованнях» о том, что теорню деления круга можио перенестн иа лемнискату, оказало большое влияние иа Абеля.

С наступлеиием иового века научиые интересы Гаусса решительио сместнлнсь в сторону от чистой математнки. Ои миого раз эпнзоднческн будет обращаться к ней и каждый раз получать результаты, достойиые генця. В 1812 г. он опубликовал работу о гнпергеометрической фуикции. (Эта функция зависнт от трех параметров. Придавая нм коикретные значения, можно получить большииство функцнй, встречающихся в математнческой фнзнке.) Шнроко нзвестна заслуга Гаусса в геометрической ннтерпретацни комплексиых чисел. О его геометрических работах мы расскажем ниже. Однако инкогда математика уже не будет главным делом его жизни. Характерный внешний штрнх: в 1801 г. Гаусс прекращает регулярно вестн дневннк (хотя отдельные запнсн появляются до 1814 г.). Мы редко отдаем себе отчет, как короток был «математический век» Гаусса — меиее 10 лет. Прн этом большую часть времени заняли работы, оставшиеся ненззестнымн современннкам (эллиптнческие функцин).

МАЛЫЕ ПЛАНЕТЫ. Расскажем теперь о новом увлеченни Гаусса. Бнографы много спорнлн о прнчинах, по которым Гаусс начал заннматься астрономией. Прежде всего надо нметь в внду, что, начниая с работ Кеплера, Галнлея н Ньютона, астрономия была наиболее ярким местом прнложения математикн. Эта траднцня была продолжена в трудах Эйлера, Даламбера, Клеро, Лагранжа, Лапласа. Предсказывая и объясияя небесиые явления, математикн чувствовали себя как бы допущенными к тайиам

мироздания. Гаусс, с его ранним интересом к конкретным вычислениям, не мог, конечно, не попробовать своих сил на этом традиционном поприще.

Впрочем, были причины и прозаические. Гаусс занимал скромное положение приват-доцента в Брауншвейге, получая 6 талеров в месяц. Пенсия в 400 талеров от герцога-покровителя не настолько улучшила его положение, чтобы он мог содержать семью, а он подумывал о женитьбе. Получить где-нибудь кафедру по математике было не просто, да Гаусс и не очень стремился к активной преподавательской деятельности. Расширяющаяся сеть обсерваторий делала карьеру астронома более доступной.

Гаусс начал интересоваться астрономией еще в Геттингене. Кое-какие наблюдения он проводил в Брауншвейге, причем часть герцогской пенсии он израсходовал на покупку секстанта. Он ищет достойную вычислительную задачу, решая пока мелкие задачи. Так, он публикует простой способ вычисления времени пасхи и других циклических праздников вместо чрезвычайно путанных рецептов, которыми пользовались раньше. Мысль о настоящей задаче появилась в 1801 г. при следующих обстоятельствах.

1 января 1801 г. астроном Пиацци, составлявший звездный каталог, обнаружил неизвестную звезду 8-й звездной величины. Пронаблюдав за ней 40 дней, Пиацци обратился к крупнейшим астрономам с просьбой продолжить наблюдения. По разным причинам его просьба не была выполнена. В июне эти сведения дошли до Цаха, издававшего единственный в то время астрономический журнал. Цах высказал гипотезу, что речь идет «о давно подозреваемой между Марсом и Юпитером, а теперь, по-видимому, открытой, новой большой планете». Гипотеза Цаха показалась правдоподобной, и надо было срочно искать «потерянную» планету. А для этого надо было вычислить ее траекторию. Определить эллиптическую траекторию по дуге в 9°, которую знал Пиацци, было за пределами вычислительных возможностей астрономов. В сентябре 1801 г., оставив все свои дела, вычислением орбиты занялся Гаусс. В ноябре вычисления были закончены. В декабрьском номере журнала Цаха они были опубликованы, а в ночь с 31 декабря на 1 января — ровно через год после наблюдений Пиацци — известный немецкий астроном Ольберс, основываясь на траектории, вычисленной

Гауссом, нашел планету (ее назвали Церерой). Это была подлинная сенсация!

25 марта 1802 г. Ольберс открывает еще одну планету — Палладу. Гаусс быстро вычисляет ее орбиту, показав, что и она располагается между Марсом и Юпитером. Действенность вычислительных методов Гаусса стала для астрономов несомненной.

К Гауссу приходит признание. Одним из признаков этого было избрание его членом-корреспондентом Петербургской академии наук. Вскоре его пригласили занять место директора Петербургской обсерватории. Гаусс пишет, что ему лестно получить приглашение в город, где работал Эйлер и серьезно думает о переезде. В письмах Гаусс пишет, что в Петербурге часто плохая погода, а потому он не будет слишком занят наблюдениями, и будет оставаться время для занятий. Он пишет, что 1000 рублей, которые будет получать, больше 400 талеров, которые он имеет сейчас, но жизнь в Петербурге дороже.

В то же время Ольберс предпринимает усилия, чтобы сохранить Гаусса для Германии. Еще в 1802 г. он предлагает куратору Геттингенского университета пригласить Гаусса на пост директора вновь организованной обсерватории. Ольберс пишет при этом, что Гаусс «к кафедре математики имеет положительное отвращение». Согласие было дано, но переезд состоялся лишь в конце 1807 г. За это время Гаусс женился («жизнь представляется мне весной со всегда новыми яркими цветами»). В 1806 г. умирает от ран герцог, к которому Гаусс, по-видимому, был искренне привязан. Теперь ничто не удерживает его в Брауншвейге.

Жизнь Гаусса в Геттингене складывалась не сладко. В 1809 г. после рождения сына умерла жена, а затем и сам ребенок. Вдобавок Наполеон обложил Геттинген тяжелой контрибуцией. Сам Гаусс должен был заплатить непосильный налог в 2000 франков. За него попытались внести деньги Ольберс и, прямо в Париже, Лаплас. Оба раза Гаусс гордо отказался. Однако нашелся еще один благодетель, на этот раз — аноним, и деньги возвращать было некому (много позднее узнали, что это был курфюрст Майнцский, друг Гёте). «Смерть мне милее такой жизни», — пишет Гаусс между заметками по теории эллиптических функций. Окружающие не ценили его работ, считали его, по меньшей мере, чудаком. Ольберс успокаивает Гаусса, говоря,

что не следует рассчитывать на понимание людей: «их нужно жалеть и им служить».

В 1809 г. выходит законченная в 1807 г. знаменитая «Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям». Задержка произошла отчасти из-за опасений издателя, что книга на немецком языке не найдет спроса, а Гаусс из патриотических соображений отказался печатать книгу по-французски. Компромисс состоял в издании книги на латыни. Это единственная книга Гаусса по астрономии (сверх этого он напечатал несколько статей).

Гаусс излагает свои методы вычисления орбит. Чтобы убедиться в силе своего метода, он повторяет вычисление орбиты кометы 1769 г., которую в свое время за три дня напряженного счета вычислил Эйлер (по некоторым сведениям потерявший после этого зрение). Гауссу на это потребовался час. В книге был изложен метод наименьших квадратов, остающийся по сей день одним из самых распространенных методов обработки результатов наблюдений. Гаусс указывает, что он знает этот метод с 1794 г., а с 1802 г. систематически им пользуется. (За два года до выхода «Теории движения» Гаусса метод наименьших квадратов был опубликован Лежандром.)

На 1810 г. пришлось большое число почестей: Гаусс получил премию Парижской академии наук и Золотую медаль Лондонского королевского общества, был избран в несколько академий.

В 1804 г. Парижская академия выбрала в качестве темы для большой премии (золотая медаль весом 1 кг) теорию возмущений Паллады. Срок дважды переносился (до 1816 г.) в надежде, что Гаусс представит работу. Гауссу помогал в вычислениях его ученик Николаи («юноша, неутомимый в вычислениях»), и все же вычисления не были доведены до конца. Гаусс прервал их, находясь в тяжелой депрессии.

Регулярные занятия астрономией продолжались почти до самой смерти. Знаменитую комету 1812 г. (которая «предвещала» пожар Москвы!) всюду наблюдали, пользуясь вычислениями Гаусса. 28 августа 1851 г. Гаусс наблюдал солнечное затмение. У Гаусса было много учеников-астрономов (Шумахер, Герлинг, Николаи, Струве). Крупнейшие немецкие геометры Мёбиус и Штаудт учились у него не геометрии, а астрономии. Он состоял в активной переписке со многими астрономами, регулярно

читал статьи и книги по астрономии, печатал рецензии. Из писем астрономам мы многое узнаем и о занятиях математикой. Как не похож облик Гаусса-астронома на представление о недоступном отшельнике, существовавшее у математиков!

ГЕОДЕЗИЯ. К 1820 г. центр практических интересов Гаусса переместился в геодезию. Еще в начале века он пытался воспользоваться результатами измерений дуги меридиана, предпринятых французскими геодезистами для установления эталона длины (метра), чтобы найти истинное сжатие Земли. Но дуга оказалась слишком мала. Гаусс мечтал провести измерение достаточно большой дуги меридиана. К этой работе он смог приступить только в 1820 г. Хотя измерения растянулись на два десятилетия, Гаусс не смог осуществить свой замысел в полном объеме. Большое значение имели полученные в связи с геодезией исследования по обработке результатов измерений (к этому времени относятся основные публикации о методе наименьших квадратов) и различные геометрические результаты, связанные с необходимостью проводить измерения на поверхности эллипсоида.

В 20-е годы обсуждался вопрос о переезде Гаусса в Берлин, где он должен был стать во главе института. Сюда должны были быть приглашены наиболее перспективные молодые математики, прежде всего Якоби и Абель. Переговоры затянулись на четыре года; разногласия были по поводу того, должен ли Гаусс читать лекции, и сколько ему должны платить в год — 1200 или 2000 талеров. Переговоры окончились безрезультатно. Впрочем, не совсем: в Геттингене Гауссу стали платить то жалование, на которое он претендовал в Берлине.

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ. Геодезии мы обязаны тем, что на сравнительно короткое время математика вновь стала одним из главных дел Гаусса. В 1816 г. он думает об обобщении основной задачи картографии — задачи об отображении одной поверхности на другую «так, чтобы отображение было подобно отображаемому в мельчайших деталях». Гаусс посоветовал Шумахеру выбрать этот вопрос при объявлении конкурса на премию Копенгагенского научного общества. Конкурс был объявлен в 1822 г. В том же году Гаусс представил свой мемуар, в котором вводятся характеристики, позволяющие полностью решить проблему, частные случаи которой изучались Эйлером и Лагранжем (отображение сферы

или поверхности вращения на плоскость). Гаусс подробно описывает выводы из его теории для многочисленных конкретных случаев, часть из которых возникает из задач геодезии.

В 1828 г. вышел в свет основной геометрический мемуар Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях». Мемуар посвящен внутренней геометрии поверхности, т. е. тому, что связано со структурой самой этой поверхности, а не с ее положением в пространстве.

Образно говоря, внутренняя геометрия поверхности — это то, что можно узнать о геометрии поверхности, «не покидая ее». На поверхности можно измерять длины, натягивая нить так, чтобы она целиком лежала на поверхности. Возникающая кривая называется геодезической (аналог прямой на плоскости). Можно измерять углы между геодезическими, изучать геодезические треугольники и многоугольники. Если мы будем изгибать поверхность (считая ее нерастяжимой и неразрываемой пленкой), то расстояния между точками будут сохраняться, геодезические будут оставаться геодезическими и т. д.

Оказывается, «не покидая поверхности», можно узнать, кривая она или нет. «Настоящую» кривую поверхность ни при каком изгибании нельзя развернуть на плоскость. Гаусс предложил числовую характеристику меры искривления поверхности.

Рассмотрим около точки A на поверхности окрестность площади ε. В каждой точке этой окрестности проведем нормаль (перпендикуляр к поверхности) единичной длины. Для плоскости все нормали будут параллельны, а для кривой поверхности будут расходиться. Перенесем нормали так, чтобы их начала оказались в одной точке. Тогда концы нормалей заполнят некоторую фигуру на единичной сфере. Пусть $\varphi(\varepsilon)$ — площадь этой фигуры. Тогда $k(A)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}$ дает меру кривизны поверхности в точке A. Оказывается, ни при каком изгибании $k(A)$ не меняется. Для того чтобы кусок поверхности можно было развернуть на плоскость, необходимо, чтобы во всех точках A этого куска было $k(A)=0$. Мера кривизны связана с суммой углов геодезического треугольника.

Гаусс интересуется поверхностями постоянной кривизны. Сфера является поверхностью постоянной положительной кривизны (во всех ее точках $k(A)=1/R$, где R — радиус). В записях Гаусса упоминается поверхность вра-

щения постоянной отрицательной кривизны. Потом ее назовут псевдосферой, и Бельтрами обнаружит, что ее внутренняя геометрия есть геометрия Лобачевского.

НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ. По некоторым сведениям Гаусс интересовался постулатом о параллельных еще в Брауншвейге в 1792 г. В Геттингене он много обсуждал проблему параллельных со студентом из Венгрии Фаркашем Бойяи. Из письма 1799 г., адресованного Ф. Бойяи, мы узнаем, насколько ясно понимал Гаусс, что имеются многочисленные утверждения, приняв которые, можно доказать пятый постулат: «Я достиг многого, что для большинства могло бы сойти за доказательство». И вместе с тем: «Однако дорога, которую я выбрал, ведет скорее не к желательной цели, а к тому, чтобы сделать сомнительной истинность геометрии». Отсюда до понимания возможности неевклидовой геометрии один шаг, но он все-таки еще не был сделан, хотя эта фраза часто ошибочно воспринимается как свидетельство того, что Гаусс пришел к неевклидовой геометрии уже в 1799 г.

Заслуживают внимания слова Гаусса, что он не имеет возможности уделить достаточно времени этим вопросам. Характерно, что о проблеме параллельных нет ничего в дневнике. По-видимому, она никогда не находилась в центре внимания Гаусса. В 1804 г. Гаусс опровергает попытки Ф. Бойяи доказать постулат о параллельных. Письмо заканчивается так: «Однако я еще надеюсь на то, что когда-нибудь, и еще до моего конца, эти подводные камни позволят перебраться через них». Похоже, что эти слова означают надежду, что доказательство будет найдено.

Вот еще несколько свидетельств: «В теории параллельных мы до сих пор не опередили Евклида. Это позорная часть математики, которая, рано или поздно, должна принять совершенно другой вид» (1813 г.). «Мы не продвинулись дальше того места, где был Евклид 2000 лет назад» (1816 г.). Однако в том же 1816 г. он говорит о «пробеле, который нельзя заполнить», а в 1817 г. в письме Ольберсу мы читаем: «Я все больше прихожу к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере, человеческим умом и для человеческого ума. Может быть, в другой жизни мы придем к другим взглядам на природу пространства, которые нам теперь недоступны. До тех пор геометрию следует ставить в ряд не с арифметикой, существующей чисто априори, а скорее с механикой».

Примерно в то же время к мысли о невозможности доказать пятый постулат пришел юрист из Кенигсберга Швейкарт. Он предположил, что наряду с евклидовой геометрией существует «астральная геометрия», в которой постулат о параллельных не имеет места. Работавший в Кенигсберге ученик Гаусса Герлинг написал учителю о мыслях Швейкарта и приложил заметку последнего. В ответе Гаусс пишет: «Почти все списано с моей души». Деятельность Швейкарта продолжил его племянник Тауринус, с которым Гаусс обменялся несколькими письмами, начиная с 1824 г.

В письмах Гаусс подчеркивает, что его высказывания носят сугубо частный характер и их ни в коем случае не следует придавать гласности. Он не верит, что эти идеи могут быть восприняты, и боится заинтересованности толпы дилетантов. Гаусс пережил немало тяжелых лет и очень дорожит возможностью спокойно работать. Он предупреждает Герлинга, который собирался лишь упомянуть, что постулат о параллельных может оказаться неверен: «Но осы, гнездо которых Вы разрушаете, поднимутся над Вашей головой». Постепенно зреет решение записать результаты, но не публиковать их: «Вероятно, я еще не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать. Возможно даже, я не решусь на это во всю свою жизнь, потому что боюсь крика беотийцев *), который поднимется, если я выскажу свои воззрения целиком» (письмо Бесселю 1829 г.). В мае 1831 г. Гаусс начинает систематические записи: «Вот уже несколько недель, как я начал излагать письменно некоторые результаты моих собственных размышлений об этом предмете, частично имеющих уже 40-летнюю давность, но никогда мною не записанных, вследствие чего я должен был 3 или 4 раза возобновлять весь труд в моей голове. Мне не хотелось бы, однако, чтобы это погибло вместе со мной» (письмо Шумахеру).

Однако в 1832 г. он получил от Фаркаша Бойяи небольшое сочинение его сына Яноша «Аппендикс» (название связано с тем, что оно было издано в виде приложения к большой книге отца). «Мой сын ставит на твое суждение больше,чем на суждение всей Европы». Содержание книги поразило Гаусса: в ней полно и систематически строилась

---

*) По преданию жители Беотии славились в Древней Греции своей глупостью.

неевклидова геометрия. Это были не отрывочные замечания и догадки Швейкарта — Тауринуса. Такое изложение собирался получить сам Гаусс в ближайшее время. Он пишет Герлингу: «...я нашел все мои собственные идеи и результаты, развитые с большим изяществом, хотя, вследствие сжатости изложения, в форме, трудно доступной тому, кому чужда эта область... Я считаю, что этот юный геометр Бойяи — гений первой величины». А вот, что написано отцу: «...все содержание работы, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил,— почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже 30—35 лет тому назад. Я действительно этим крайне поражен. Я имел намерение о своей собственной работе, кое-что из которой я теперь нанес на бумагу, при жизни ничего не публиковать... я имел намерение..., чтобы эти мысли, по крайней мере, не погибли со мной. Я поэтому чрезвычайно поражен случившимся — оно освобождает меня от этой необходимости; и меня очень радует, что именно сын моего старого друга таким удивительным образом меня предвосхитил». Никакой публичной оценки или поддержки Янош Бойяи от Гаусса не получил. По-видимому, одновременно Гаусс прервал систематические записи по неевклидовой геометрии, хотя сохранились эпизодические заметки, относящиеся к 40-м годам.

В 1841 г. Гаусс познакомился с немецким изданием работы Лобачевского (первые публикации Лобачевского относятся к 1829 г.). Верный себе, Гаусс интересуется другими публикациями автора, ограничиваясь высказываниями о нем в переписке с близкими корреспондентами. Впрочем, по предложению Гаусса, в 1842 г. Лобачевского «как одного из превосходнейших математиков русского государства» избрали членом-корреспондентом Геттингенского ученого королевского общества. Гаусс лично известил Лобачевского об избрании. Однако ни в представлении Гаусса, ни в дипломе, выданном Лобачевскому, неевклидова геометрия не упоминалась.

О работах Гаусса по неевклидовой геометрии узнали лишь при публикации посмертного архива. Так Гаусс обеспечил себе возможность спокойно работать отказом обнародовать свое великое открытие, вызвав несмолкающие по сей день споры о допустимости занятой им позиции.

Следует отметить, что Гаусса интересует не только чисто логический вопрос о доказуемости постулата о параллельных. Его интересует место геометрии в естественных

науках, вопрос об истинной геометрии нашего физического мира (см. выше высказывание 1817 г.). Он обсуждает возможность астрономической проверки, с интересом отзываясь о соображениях по этому поводу Лобачевского. При занятиях геодезией Гаусс не удержался от измерения суммы углов треугольника с вершинами Высокий Гаген, Брокен, Инсельберг. Отклонение от 2π не превысило 0,2′.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ЗЕМНОЙ МАГНЕТИЗМ. К концу 20-х годов Гаусс, перешедший 50-летний рубеж, начинает поиски новых для себя областей научной деятельности. Об этом свидетельствуют две публикации 1829 и 1830 гг. Первая из них несет печать размышлений об общих принципах механики (здесь строится «принцип наименьшего принуждения» Гаусса); другая посвящена изучению капиллярных явлений. Гаусс решает заниматься физикой, но его узкие интересы еще не определились. В 1831 г. он пытается заниматься кристаллографией. Это очень трудный год в жизни Гаусса: умирает его вторая жена, у него начинается тяжелейшая бессоница. В этом же году в Геттинген приезжает приглашенный по инициативе Гаусса 27-летний физик Вильгельм Вебер. Гаусс познакомился с ним в 1828 г. в доме Гумбольдта. Гауссу было 54 года; о его замкнутости ходили легенды, и все же в Вебере он нашел сотоварища по занятиям наукой, какого он никогда не имел прежде.

«Внутреннее различие этих людей достаточно выражалось также и в их внешнем облике. Гаусс — приземистый, крепкого телосложения, настоящий представитель Нижней Саксонии, малоразговорчивый и замкнутый в себе. Своеобразной противоположностью ему является небольшой, изящный, подвижный Вебер, чрезвычайная любезность и разговорчивость которого сразу же обнаруживали коренного саксонца; он был действительно родом из Виттенберга, этой страны «саксонцев в квадрате». На геттингенском памятнике Гауссу и Веберу эта противоположность из художественных соображений смягчена и даже по возрасту они кажутся более близкими, чем это было в действительности» (Ф. Клейн).

Интересы Гаусса и Вебера лежали в области электродинамики и земного магнетизма. Их деятельность имела не только теоретические, но и практические результаты. В 1833 г. они изобретают электромагнитный телеграф (это событие запечатлено в их общем памятнике). Первый телеграф связывал обсерваторию и физический институт. По

финансовым причинам внедрить телеграф в жизнь его создателям не удалось.

В процессе занятий магнетизмом Гаусс пришел к выводу, что системы физических единиц надо строить, вводя некоторое количество независимых величин и выражая остальные величины через них.

Изучение земного магнетизма опиралось как на наблюдения в магнитной обсерватории, созданной в Геттингене, так и на материалы, которые собирались в разных странах «Союзом для наблюдения над земным магнетизмом», созданным Гумбольдтом после возвращения из Южной Америки. В это же время Гаусс создает одну из важнейших глав математической физики — теорию потенциала.

Совместные занятия Гаусса и Вебера были прерваны в 1843 г., когда Вебера вместе с шестью другими профессорами изгнали из Геттингена за подписание письма королю, в котором указывались нарушения последним конституции (Гаусс не подписал письма). Возвратился в Геттинген Вебер лишь в 1849 г., когда Гауссу было уже 72 года.

Мы закончим наш рассказ о Гауссе словами Клейна: «Гаусс напоминает мне образ высочайшей вершины баварского горного хребта, какой она предстает перед глазами наблюдателя, глядящего с севера. В этой горной цепи в направлении с востока на запад отдельные вершины подымаются все выше и выше, достигая предельной высоты в могучем, высящемся в центре великане; круто обрываясь, этот горный исполин сменяется низменностью новой формации, в которую на много десятков километров далеко проникают его отроги, и стекающие с него потоки несут влагу и жизнь».

Добавление

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ, ПРИВОДЯЩИЕ К КУБИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

В «Арифметических исследованиях» Гаусс сообщает без доказательства, что нельзя построить циркулем и линейкой правильные n-угольники для простых n, не являющихся простыми числами Ферма, в частности, правильный 7-угольник. Этот отрицательный результат должен был удивить современников не меньше, чем возможность построения правильного 17-угольника. Ведь $n = 7$ — первое значение n, для которого, несмотря на многочисленные попытки, построение правильного n-угольни-

ка не получалось. Несомненно, что греческие геометры подозревали, что с этой задачей дело обстоит неблагополучно, и неспроста, скажем, Архимед предложил способ построения правильного 7-угольника, использующий конические сечения. Однако вопрос о доказательстве невозможности построения, по-видимому, даже не вставал.

Надо сказать, что доказательства отрицательных утверждений всегда играли в истории математики принципиальную роль. Доказательство невозможности требует так или иначе обозреть все мыслимые способы решения, построения или доказательства, в то время как для положительного решения достаточно указать один конкретный способ.

Доказательства невозможности в математике имели знаменательное начало, когда пифагорейцы (VI век до н. э.), стремившиеся всю математику свести к целым числам, собственными руками похоронили эту идею: оказалось, что не существует дроби, квадрат которой равен 2. Другая формулировка: диагональ и сторона квадрата несоизмеримы. Итак, целых чисел и их отношений недостаточно для описания очень простой ситуации. Это открытие удивило величайших мыслителей Древней Греции. Легенда утверждает, что боги покарали пифагорейца, сообщившего этот факт людям (он погиб при кораблекрушении). Платон (429—348 до н. э.) рассказывает о том, как поразило его существование иррациональных величин. Однажды Платон столкнулся с «практической» задачей, заставившей его переосмыслить возможности геометрии.

«Эратосфен рассказывает в своем сочинении «Платоник», что когда бог возвестил через оракула делийцам, что, дабы избавиться от чумы, они должны построить жертвенник, вдвое больше старого, строители стали в тупик перед задачей построить тело, в два раза большее данного. Они обратились за советом к Платону, и тот сказал им, что бог дал им это предсказание не потому, что ему нужен вдвое больший жертвенник, но что он возвестил это в укор грекам, которые не думают о математике и не дорожат геометрией» (Теон Смирнский). Платону не откажешь в умении использовать подходящий момент для пропаганды науки! По свидетельству Евтония аналогичная задача (об удвоении надгробного камня Главку) фигурировала уже в одном варианте легенды о Миносе.

Итак, речь идет о нахождении стороны куба с удвоенным объемом, т. е. о построении корня уравнения $x^3=2$.

Платон направил делийцев к Евдоксу и Геликону. Разные решения предложили Менехм, Архит и Евдокс, но никто из них не нашел построения при помощи циркуля и линейки. Позднее Эратосфен, построивший механический прибор для решения задачи об удвоении куба, в стихотворении, высеченном на мраморной доске в храме Птолемея в Александрии, квалифицирует решения своих предшественников как слишком сложные: «Нужды тебе уже не будет в премудром цилиндре Архита, в конусе не для тебя высек триаду Менехм и с богоравным Евдоксом изогнутых линий не надо...». Менехм заметил, что решаемая задача эквивалентна задаче о двух средних пропорциональных (для заданных a, b) $:a:x=x:y=y:b$. Его решение использовало конические сечения. Об «изогнутых линиях» Евдокса мы ничего не знаем. Что касается механического решения, то Эратосфен не был первым. По свидетельству Плутарха, «сам Платон порицал друзей Евдокса, Архита и Менехма, которые хотели свести удвоение куба к механическим построениям, ибо они думали получить средние пропорциональные не из теоретических соображений; но ведь таким образом уничтожается и гибнет благо геометрии и этим путем геометрия возвращается обратно к чувственному, вместо того чтобы подыматься выше этого и твердо держаться вечных, нематериальных образов, пребывающий в коих бог есть вечный бог». Впрочем, Евтокий приписывает самому Платону (по-видимому, ошибочно) некое механическое решение делийской задачи, использующее плотничьи угольники с пазами и подвижными рейками. Платону с его отвращением к «материальным вещам, которые требуют длительной обработки недостойным ремеслом» (Плутарх) нередко противопоставляют Архимеда (287—212 до н. э.), прославившегося многочисленными изобретениями, в частности, машинами, примененными при обороне Сиракуз. Впрочем, тот же Плутарх утверждает, что Архимед лишь поддался уговорам царя Гиерона «отвлечь свое искусство от абстракций... и осязательным образом заняться тем, чего требует действительность», хотя и считал, что практика — «дело низкое и неблагородное; сам же он стремился лишь к тому, что по красоте своей и совершенству находится далеко от царства необходимости».

Наряду с делийской задачей греческая геометрия оставила еще несколько задач, в которых построение не удавалось осуществить циркулем и линейкой: трисекция угла (деление угла на три равные части), квадратура круга и

задача о построении правильного n-угольника, в частности, 7-угольника и 9-угольника. Связь некоторых из этих задач с кубическими уравнениями сознавали греческие и еще в большей степени арабские математики.

Задача о правильном 7-угольнике сводится к уравнению $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ (см. с. 147) или $\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0$. Переходя к переменной $x=z+\frac{1}{z}$, получаем уравнение $x^3+x^2-2x-1=0$.

Мы покажем, что корни уравнения удвоения куба и 7-угольника не могут быть квадратичными иррациональностями, откуда и будет следовать невозможность построения циркулем и линейкой. Мы докажем результат, который обслуживает весьма общую ситуацию:

Теорема. *Если кубическое уравнение $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ с целыми коэффициентами имеет корень, являющийся квадратичной иррациональностью, то оно имеет и рациональный корень.*

Доказательство. Пусть x_1 — такой корень. Он получается из целых чисел при помощи арифметических операций и извлечения квадратного корня. Проанализируем эту конструкцию. Вначале корень извлекается из некоторого количества рациональных чисел: $\sqrt{A_1}$, $\sqrt{A_2}$, ..., $\sqrt{A_a}$, затем из некоторых чисел, получающихся при помощи арифметических операций из рациональных чисел и $\sqrt{A_i}$ ($\sqrt{B_1}$, ..., $\sqrt{B_b}$) и т. д.; на каждом шаге корень извлекается из каких-то чисел, арифметически выражающихся через полученные на всех предыдущих шагах. Возникают «этажи» квадратичных иррациональностей. Пусть $\sqrt{N}$ — одно из чисел, полученных на последнем шаге перед образованием x_1. Сконцентрируем внимание на том, как $\sqrt{N}$ входит в x_1. Оказывается, можно считать, что $x_1=\alpha+\beta\sqrt{N}$, где $\sqrt{N}$ не входит в квадратичные иррациональности α, β. Достаточно заметить, что арифметические операции над выражениями вида $\alpha+\beta\sqrt{N}$ приводят к таким же выражениям: для сложения и вычитания это очевидно, для умножения проверяется непосредственно, для деления надо исключить $\sqrt{N}$ из знаменателя: $\frac{\alpha+\beta\sqrt{N}}{\gamma+\delta\sqrt{N}}=$ $=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{N})(\gamma-\delta\sqrt{N})}{\gamma^2-\delta^2N}$.

Если теперь подставить $x_1 = \alpha + \beta\sqrt{N}$ в уравнение и выполнить действия, то получится соотношение вида $P + Q\sqrt{N} = 0$, где P, Q — многочлены от α, β, a_i. Если $Q \neq 0$, то $\sqrt{N} = P/Q$, и подставляя выражение для $\sqrt{N}$ в x_1, можно получить для x_1 представление, уже не содержащее $\sqrt{N}$. Если же $Q = 0$, то проверяется, что $x_2 = \alpha - \beta\sqrt{N}$ — также корень, а учитывая, что $-a_2/a_3 = x_1 + x_2 + x_3$ — сумма корней (теорема Виета), получаем: $x_3 = -a_2/a_3 - 2\alpha$, т. е. опять-таки имеется корень, являющийся квадратичной иррациональностью, выражающейся через $\sqrt{A_i}$, $\sqrt{B_j}$, ..., как и x_1, но без $\sqrt{N}$. Продолжая этот процесс дальше, мы избавимся в выражении для корня уравнения ото всех радикалов поэтажно, начиная с последнего этажа. После этого получится рациональный корень, и доказательство окончено.

Теперь остается проверить, что у интересующих нас уравнений нет рациональных корней. Предположим, что у уравнения старший коэффициент $a_3 = 1$. Тогда всякий рациональный корень является целым. Достаточно подставить $x = p/q$ (p, q — взаимно просты) в уравнение, умножить обе части на q^3 и убедиться, что p^3, а значит и p, делится на q, т. е. $q = 1$. Далее, если α — корень, то $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - a)\ (x^2 + mx + n)$, где $a_2 = -\alpha + m$, $a_1 = -\alpha m + n$, $a_0 = -\alpha n$, т. е. $m = a_2 + \alpha$, $n = a_1 + a_2\alpha + \alpha^2$. Значит, если a_i и α — целые, то m и n — целые, и α должен быть делителем a_0. В результате для уравнений с $a_3 = 1$ поиски рациональных корней сводятся к перебору конечного числа возможностей — делителей свободного члена. Для интересующих нас уравнений легко проверяется отсутствие целочисленных корней, а значит, отсутствие корней, являющихся квадратичными иррациональностями.

СОДЕРЖАНИЕ

Семен Григорьевич Гиндикин

РАССКАЗЫ О ФИЗИКАХ И МАТЕМАТИКАХ

(Серия Библиотечка «Квант»)

Редактор *Л. А. Панюшкина*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *Н. Д. Дорохова*

ИБ № 12788

Сдано в набор 22.02.84. Подписано к печати 03.10.84. Т-18362. Формат 84×108[1]/[32]. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 10,08. Усл. кр.-отт. 10,5. Уч.-изд. л. 10,67 Тираж 150 000 экз. Заказ № 1325. Цена 30 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136 Ленинград П-136, Чкаловский пр., 15.



30 к.

1c